

Построение модели шахтной перемычки на базе расчетной схемы толстой плиты

С.В. Черданцев✉, П.А. Шлапаков, К.С. Лебедев, А.Ю. Ерастов, С.А. Хаймин

АО «Научный центр ВостНИИ по промышленной и экологической безопасности в горной отрасли», Кемерово, Российская Федерация
✉svch01@yandex.ru

Резюме: Разработка угольных месторождений сопровождается выделением метана из разрушенного угля и образованием пылегазовоздушных смесей, предрасположенных к различным негативным газо- и термодинамическим явлениям в рудничной атмосфере, в первую очередь дефлаграционным и детонационным процессам, в результате чего в рудничной атмосфере образуются ударные волны, что в условиях угольных шахт может привести к катастрофическим последствиям. С целью предотвращения распространения негативных газо- и термодинамических явлений в рудничной атмосфере на угольных предприятиях используются шахтные перемычки. К настоящему времени разработано достаточно много конструкций шахтных перемычек, а также технологических схем их возведения. Однако имеющиеся методики по определению параметров перемычек, на наш взгляд, не соответствуют реальным условиям их работы и поэтому не отвечают современным требованиям по обеспечению надежности перемычек. В статье обсуждается напряженно-деформированное состояние в шахтной перемычке круглого поперечного сечения на основе классической модели толстой плиты цилиндрической формы. Сформулирована краевая задача теории толстых плит в линейной постановке и построено ее решение, в результате которого найдены компоненты напряжений и перемещений в перемычке под действием давления, обусловленного ударной волной. Построены графики напряжений, изменяющиеся вдоль продольной оси перемычки и вдоль радиуса ее поперечного сечения. Отмечены некоторые закономерности распределения напряжений в шахтной перемычке.

Ключевые слова: горные выработки, шахтные перемычки, компоненты напряженного состояния, обобщенный закон Гука, краевая задача о равновесии перемычки, функции напряжений, уравнение Лапласа, задача Ламе

Для цитирования: Черданцев С.В., Шлапаков П.А., Лебедев К.С., Ерастов А.Ю., Хаймин С.А. Построение модели шахтной перемычки на базе расчетной схемы толстой плиты. *Горная промышленность*. 2023;(1):110–116. <https://doi.org/10.30686/1609-9192-2023-1-110-116>

Construction of a model of a shaft jumper based on the calculation scheme of a thick plate

S.V. Cherdantsev✉, O.V. Tailakov, P.A. Shlapakov, A.Yu. Erastov, K.S. Lebedev

Scientific Centre VOSTNII on industrial and ecological safety in mountain industry, Kemerovo, Russian Federation
✉svch01@yandex.ru

Abstract: The development of coal deposits is accompanied by the release of methane from the destroyed coal and the formation of dust-gas-air mixtures predisposed to various negative gas and thermodynamic phenomena in the mine atmosphere, primarily deflagration and detonation processes, as a result of which shock waves are formed in the mine atmosphere, which in the conditions of coal mines can lead to catastrophic consequences. In order to prevent the spread of negative gas and thermodynamic phenomena in the mine atmosphere, mine bridges are used at coal enterprises. To date, quite a lot of designs of mine jumpers have been developed, as well as technological schemes for their construction. However, the available methods for determining the parameters of jumpers, in our opinion, do not correspond to the real conditions of their operation and therefore do not meet modern requirements for ensuring the reliability of jumpers. This article discusses the stress-strain state in a shaft bridge of circular cross-section based on the classical model of a thick plate of cylindrical shape. In the article, the boundary value problem of the theory of thick plates in a linear formulation is formulated and its solution is constructed, as a result of which the components of stresses and displacements in the bridge under the influence of pressure caused by a shock wave are found. Stress graphs are constructed that vary along the longitudinal axis of the bridge and along the radius of its cross section. Some regularities of stress distribution in the shaft bridge are noted.

Keywords: mine workings, mine bridges, stress state components, generalized Hooke's law, boundary value problem of the bridge equilibrium, stress functions, Laplace equation, Lamé problem

For citation: Cherdantsev S.V., Tailakov O.V., Shlapakov P.A., Erastov A.Yu., Lebedev K.S. Construction of a model of a shaft jumper based on the calculation scheme of a thick plate. *Russian Mining Industry*. 2023;(1):110–116. <https://doi.org/10.30686/1609-9192-2023-1-110-116>

Введение

Согласно нормативным требованиям эксплуатации угольных шахт при отработке пластов, склонных к самовозгоранию [1; 2], проявлению газодинамических [3; 4] и детонационных процессов [5–10], необходимо проводить изоляцию выработанных пространств от действующих горных выработок. Процесс изоляции осуществляется возведением шахтных перемычек [1].

Конструктивные схемы шахтных перемычек рекомендуются принимать на основе их прочностного расчёта, хотя при этом учитываются также горно-геологические и горнотехнические условия в местах возведения перемычек.

К настоящему времени разработаны различные типы и конструкции перемычек [11], а также технологические схемы их возведения. Однако в действующей нормативной документации пока отсутствует методика выполнения прочностных расчётов, обосновывающая проектные решения по выбору параметров шахтных перемычек. В связи со сказанным в данной статье рассматривается построение модели перемычки круглого поперечного сечения (рис. 1) на базе расчетной схемы толстой плиты в рамках следующих допущений:

1) горная выработка круглого поперечного сечения, в которой жестко установлена бетонная перемычка, имеющая форму круглого цилиндра радиуса R ;

2) перемычка изготовлена из монолитного бетона, представляющего собой упругое тело;

3) давление на фронте ударной волны распределено равномерно по торцевому сечению перемычки и поэтому перемычка деформируется симметрично относительно ее оси.

Постановка задачи

о напряженно-деформированном состоянии шахтной перемычки

Отнесем перемычку, представляющую собой плиту круглого поперечного сечения к цилиндрической системе координат с началом в центре O срединной плоскости и с осью z , перпендикулярной этой плоскости. Радиус плиты обозначим через R , а толщину – через 2δ (рис. 1).

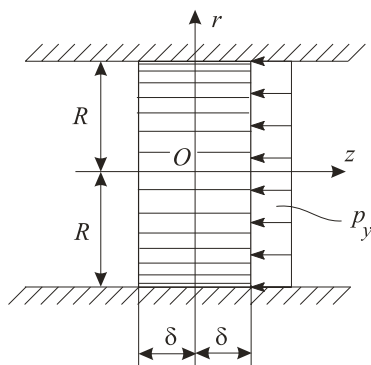


Рис. 1
Расчетная схема шахтной перемычки

Fig. 1
Design scheme of the shaft jumper

В силу 3-го допущения о симметричности деформации ее компоненты $\varepsilon_{rr}, \dots, \varepsilon_{zz}$ в цилиндрической системе координат и угол поворота ω_θ определяются по формулам [12; 13]

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right), \quad (1)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \omega_\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \right),$$

где u_r, u_z – компоненты вектора перемещения произвольного элемента перемычки.

Исключив из формул (1) перемещения u_r, u_z , найдем производные

$$\frac{\partial \omega_\theta}{\partial r} = \frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{rz}}{\partial r}, \quad \frac{\partial \omega_\theta}{\partial z} = \frac{\partial \varepsilon_{rz}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial r}, \quad (2)$$

и воспользуемся уравнениями равновесия малого элемента перемычки в цилиндрических координатах [12; 13]

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} = 0.$$

Согласно второму допущению об упругости материала перемычки имеют место соотношения закона Гука между напряжениями и деформациями

$$\sigma_{rr} = \lambda \Theta + 2G \varepsilon_{rr}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \lambda \Theta + 2G \varepsilon_{\theta\theta}, \quad (4)$$

$$\sigma_{zz} = \lambda \Theta + 2G \varepsilon_{zz}, \quad \sigma_{rz} = 2G \varepsilon_{rz},$$

где Θ – объемная деформация, определяемая как

$$\Theta = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r \cdot u_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad (5)$$

а параметры Ламе λ, G , модуль Юнга E и коэффициент Пуассона μ связаны между собой следующими зависимостями:

$$\lambda = \frac{\mu E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}, \quad G = \frac{E}{2(1 + \mu)}.$$

С помощью формул (4), (2) уравнения (3) преобразуем к системе уравнений

$$(\lambda + 2G) \frac{\partial \Theta}{\partial r} + 2G \frac{\partial \omega_\theta}{\partial z} = 0, \quad (6)$$

$$(\lambda + 2G) \frac{\partial \Theta}{\partial z} - \frac{2G}{r} \frac{\partial (r \omega_\theta)}{\partial r} = 0,$$

для которой сформулируем краевую задачу исходя из следующих рассуждений. Поскольку плита-перемычка находится в равновесии, то ее контур, непосредственно прилегающий к поверхности выработки, не перемещается по всей длине перемычки, а давление ударной волны p_y уравновешено нормальными напряжениями в торцевом сечении перемычки ($z = \delta$). На противоположном же ее торце ($z = -\delta$) нормальные напряжения σ_{zz} отсутствуют и поэтому граничные условия представляются в виде:

$$\sigma_{zz}|_{z=\delta} = -P_y, \quad \sigma_{rz}|_{z=\pm\delta} = 0, \quad \sigma_{zz}|_{z=-\delta} = 0 \quad (7)$$

В совокупности с системой уравнений (6) граничные условия (7) образуют краевую задачу о взаимодействии цилиндрической перемычки с ударной волной.

Решение краевой задачи построим с помощью функций напряжений $\varphi(r, z)$, $\Phi(r, z)$, с которыми свяжем объемную деформацию Θ и угол поворота ω_θ следующим образом [8; 9; 13]:

$$\Theta = \frac{2(1-\mu)}{\lambda+2G} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1-2\mu}{G} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad \omega_\theta = \frac{1-\mu}{G} \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad (8)$$

а также компоненты напряжений σ_{zz} и σ_{rz}

$$\sigma_{zz} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad \sigma_{rz} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \quad (9)$$

Подставив формулы (8) в первое уравнение системы (6), приходим к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = 0, \quad (10)$$

представляющему собой уравнение Лапласа в координатах r, z для функции φ .

Выразим далее остальные компоненты напряженно-деформированного состояния плиты-перемычки через функции напряжений $\varphi(r, z)$, $\Phi(r, z)$. Для этой цели вначале сопоставим вторую формулу (1) и вторую формулу (9), выразив в ней с помощью последней формулы (4) напряжение σ_{rz} через деформацию ε_{rz} :

$$\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} = \frac{1}{G} \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \quad (11)$$

Аналогично, сопоставив четвертую формулу (1) и вторую формулу (8), получим равенство

$$\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} = 2 \frac{1-\mu}{G} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (12)$$

Складывая вначале равенства (11) и (12), а затем вычитая их, получим два соотношения

$$\frac{\partial u_r}{\partial z} = \frac{1}{2G} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} [\Phi + 2(1-\mu)\varphi], \quad \frac{\partial u_z}{\partial r} = \frac{1}{2G} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [\Phi - 2(1-\mu)\varphi]. \quad (13)$$

Обратим внимание, что первое соотношение (13) может быть проинтегрировано, в результате чего получим связь между перемещением u_r и функциями Φ, φ

$$u_r = \frac{1}{2G} \frac{1}{r} [\Phi + 2(1-\mu)\varphi] \quad (14)$$

Учитывая в первой формуле (8) соотношения (5) и (14), выразим производную $\partial u_r / \partial z$ через функции Φ, φ и после преобразований получаем формулу

$$\frac{\partial u_r}{\partial z} = -\frac{1}{2G} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} + 2\mu \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right), \quad (15)$$

интегрируя которую, находим

$$u_z = -\frac{1}{2G} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} + 2\mu \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) z. \quad (16)$$

Ввиду равенства смешанных производных [14] справедливо следующее соотношение

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right),$$

подставляя в которое формулы (13) и (15), получаем равенство

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \quad (17)$$

которое устанавливает связь между функциями Φ и φ . Оно будет выполнено, если функция Φ представлена следующим образом:

$$\Phi = \psi + z \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (18)$$

в чем легко убедиться, подставив формулу (18) в (17), в результате чего мы приходим к уравнению Лапласа для функции ψ

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = 0. \quad (19)$$

Таким образом, искомые функции φ и ψ в рассматриваемой задаче удовлетворяют уравнению Лапласа (10), (19), в связи с чем они обе являются гармоническими.

Далее подставим в (14) первую и третью формулы (1), выразив тем самым компоненты деформации через функции напряжений

$$\varepsilon_{rr} = \frac{1}{2G} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\Phi + 2(1-\mu)\varphi}{r} \right], \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{2G} \frac{\Phi + 2(1-\mu)\varphi}{r^2}.$$

Учитывая полученные формулы вместе с первой формулой (8) в соотношениях закона Гука (4), после преобразований получим остальные компоненты напряжений, выраженные через функции напряжений

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \Omega, \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{2(1+\mu)}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \Omega \quad (20)$$

где обозначено

$$\Omega = \frac{\Phi + 2(1-\mu)\varphi}{r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r}. \quad (21)$$

Построение решения краевой задачи.

Анализ результатов

Решение данной краевой задачи выполним в несколько этапов. В первую очередь рассмотрим изгиб плиты-перемычки давлением p , приложенным равномерно к правому ее торцу.

Подставив в (7) формулы (9), приведем условия (7) к следующему виду:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{z=\delta} = r \cdot p_y, \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{z=-\delta} = 0, \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{z=\pm\delta} = 0. \quad (22)$$

Из первого равенства (22) вытекает соотношение

$$\begin{aligned} \Phi|_{z=\delta} &= -\int_0^R p_y r \cdot dr = -\frac{R^2}{2} p_y = -\frac{R^2}{2} \cdot \frac{\pi}{\pi} p_y = \\ &= -\frac{\pi R^2 p_y}{2\pi} = -\frac{P}{2\pi}, \end{aligned} \quad (23)$$

где P – продольная сила в торцевом сечении от действия ударной волны.

Поскольку на противоположном торце перемычки продольная сила $P = 0$, то из формулы (23) следует, что

$$\Phi|_{z=-\delta} = 0 \quad (24)$$

и, следовательно, функция напряжений – $P/2\pi$ изменится от значения до нуля и поэтому её можно представить некоторым полиномом переменной z . Такая форма характерна для решений многих задач теории упругости при осевой симметрии [10].

В силу сказанного примем функции ψ и φ в виде

$$\psi = A_1 r^2 + A_2 r^2 z + A_4 (4z^2 - 3r^2) r^2 z, \quad \varphi = B_4 (4z^2 - 3r^2) r^2 z \quad (25)$$

и тогда ϕ в соответствии с формулой (18) будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} \Phi &= A_1 r^2 + A_2 r^2 z + A_4 (4z^2 - 3r^2) r^2 z + z \frac{\partial}{\partial z} [B_4 (4z^2 - 3r^2) r^2 z] = \\ &= [A_1 + A_2 z - 3(A_4 + B_4) r^2 z + 4(A_4 + 3B_4) z^3] r^2. \end{aligned} \quad (26)$$

Подставляя формулу (26) в условие (24), получаем уравнение

$$A_1 - A_2 \delta + 3(A_4 + B_4) r^2 \delta - 4(A_4 + 3B_4) \delta^3 = 0,$$

которое распадается на систему двух уравнений

$$\begin{cases} A_1 - A_2 \delta - 4(A_4 + 3B_4) \delta^3 = 0, \\ A_4 + B_4 = 0. \end{cases} \quad (27)$$

Используя первое и второе условия (22), получаем еще одну систему уравнений

$$\begin{cases} 2A_1 + 2A_2 \delta + 8(A_4 + 3B_4) \delta^3 = p_y, \\ A_2 + 12(A_4 + 3B_4) \delta^2 = 0. \end{cases} \quad (28)$$

Решая совместно системы уравнений (27) и (28), находим значения постоянных:

$$A_1 = \frac{1}{4} p_y, \quad A_2 = \frac{3}{8} \frac{p_y}{\delta}, \quad A_4 = -B_4 = \frac{1}{64} \frac{p_y}{\delta^3},$$

с учетом которых формулы (25), (18) и (21) приобретают вид

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{p_y}{64\delta^3} (3r^2 - 4z^2) r^2 z, \quad \Phi = \frac{p_y}{8} \left(2 + 3 \frac{z}{\delta} - \frac{z^3}{\delta^3} \right) r^2, \\ \Omega &= \frac{p_y}{32} \left\{ 8 + \left[12 - 3(3+\mu) \left(\frac{r}{\delta} \right)^2 + 4\mu \left(\frac{z}{\delta} \right)^2 \right] \frac{z}{\delta} \right\}. \end{aligned} \quad (29)$$

Подставив найденные функции ψ , Φ и Ω в формулы (9), (20), (14) и (16) получаем выражения для напряжений и перемещений в плите-перемычке:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{p_y}{32} \left\{ 8 + \left[12 + 3(3+\mu) \left(\frac{r}{\delta} \right)^2 - 4(2+\mu) \left(\frac{z}{\delta} \right)^2 \right] \frac{z}{\delta} \right\}, \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{p_y}{32} \left\{ 8 + \left[12 + 3(1+3\mu) \left(\frac{r}{\delta} \right)^2 - 4(2+\mu) \left(\frac{z}{\delta} \right)^2 \right] \frac{z}{\delta} \right\}, \\ \sigma_{zz} &= -\frac{p_y}{4} \left[2 + 3 \frac{z}{\delta} - \left(\frac{z}{\delta} \right)^3 \right], \quad \sigma_{rz} = \frac{3p}{8} \left[1 - \left(\frac{z}{\delta} \right)^2 \right] \frac{r}{\delta}, \\ u_r &= \frac{p_y}{16G} \left\{ 2 + \left[3 + \frac{3}{4}(1-\mu) \left(\frac{r}{\delta} \right)^2 - (2-\mu) \left(\frac{z}{\delta} \right)^2 \right] \frac{z}{\delta} \right\} r, \\ u_z &= -\frac{p_y}{2G} \left\{ \left[8 + 3 \left(2 + \mu \frac{r^2}{\delta^2} \right) \frac{z}{\delta} - (1+\mu) \left(\frac{z}{\delta} \right)^3 \right] z - 3 \left[1 - \frac{1-\mu}{8} \left(\frac{r}{\delta} \right)^2 \right] \frac{r^2}{\delta} \right\}. \end{aligned} \quad (30)$$

Полученные выражения не являются окончательными, поскольку к ним необходимо добавить напряжения, обусловленные нагрузками q_1 и q_2 , возникающими со стороны массива горных пород и зависящими от условий закрепления плиты-перемычки в выработке. Здесь отметим, что нагрузка q_1 является равномерно распределенной нагрузкой, а нагрузка q_2 распределена вдоль цилиндрической поверхности по линейному закону $q_2 \cdot z/\delta$.

Для определения q_1 и q_2 учтем, что перемычка жестко закреплена в выработке, в связи с чем радиальные перемещения на левом и правом торцевых сечениях перемычки равны нулю

$$u_r|_{r=R, z=\pm\delta} = 0. \quad (31)$$

Поскольку перемещения перемычки $u_{r(\text{общ})}$ складываются из перемещений u_r , вызванных давлением на фронте ударной волны p_y , и перемещений $u_{r(q_1)}$, $u_{r(q_2)}$ от действия сил q_1 и q_2

$$u_r|_{r=R, z=\pm\delta} = u_r + u_{r(p_1)} + u_{r(p_2)}, \quad (32)$$

то условие (31) можно переписать в виде

$$u_r + u_{r(q_1)} + u_{r(q_2)} = 0, \quad (33)$$

в котором u_r определяем по предпоследней формуле (30), а перемещения $u_{r(q_1)}$, $u_{r(q_2)}$ по формулам [12]

$$u_{r(1)} = \frac{1-\mu}{E} q_1 R, \quad u_{r(2)} = \pm \frac{1-\mu}{E} q_2 R, \quad (34)$$

являющихся решениями задачи Ламе о сжатии цилиндрического тела по боковой поверхности.

Подставляя в уравнение (33) предпоследнюю формулу (30) и формулы (34), получим систему алгебраических уравнений

$$\frac{p_y}{16G} \left\{ 2 + \left[1 + \mu + \frac{3}{4}(1-\mu) \left(\frac{R}{\delta} \right)^2 \right] \right\} + \frac{1-\mu}{E} q_1 + \frac{1-\mu}{E} q_2 = 0,$$

$$\frac{p_y}{16G} \left\{ 2 + \left[1 + \mu + \frac{3}{4}(1-\mu) \left(\frac{R}{\delta} \right)^2 \right] \right\} + \frac{1-\mu}{E} q_1 - \frac{1-\mu}{E} q_2 = 0$$

относительно искомым величин q_1 и q_2 , для отыскания которых сначала сложим полученные уравнения, а затем вычтем их. В результате находим

$$q_1 = -\frac{p_y(1+\mu)}{4(1-\mu)}, \quad q_2 = -\frac{p_y(1+\mu)}{8(1-\mu)} \left[1 + \mu + \frac{3}{4}(1-\mu) \left(\frac{R}{\delta} \right)^2 \right]. \quad (35)$$

Значения напряжений и перемещений в перемычке от действия распределенных нагрузок q_1, q_2 определим по формулам

$$\sigma_{rr}^{(q)} = \sigma_{\theta\theta}^{(q)} = q_1 + q_2 \frac{z}{\delta}, \quad \sigma_{zz}^{(q)} = \sigma_{rz}^{(q)} = 0,$$

$$u_r^{(q)} = \frac{1-\mu}{E} \left(q_1 + q_2 \frac{z}{\delta} \right) r, \quad u_z^{(q)} = -\frac{1}{E} \left\{ 2\mu q_1 z + \frac{q_2}{2\delta} \left[(1-\mu)r^2 + 2\mu z^2 \right] \right\}, \quad (36)$$

являющимся решениями задачи Ламе.

Подставляя выражения (35) в формулы (36), найдем напряжения и перемещения в плите-перемычке, обусловленные нагрузками q_1, q_2 :

$$\sigma_{rr}^{(q)} = \sigma_{\theta\theta}^{(q)} = -\frac{p_y(1+\mu)}{8(1-\mu)} \left\{ 2 + \left[1 + \mu + \frac{3}{4}(1-\mu) \left(\frac{R}{\delta} \right)^2 \right] \frac{z}{\delta} \right\},$$

$$u_r^{(q)} = -\frac{p_y(1+\mu)}{E} \left\{ 2 + \left[1 + \mu + \frac{3}{4}(1-\mu) \left(\frac{R}{\delta} \right)^2 \right] \frac{z}{\delta} \right\} r,$$

$$u_z^{(q)} = \frac{p_y}{16E} \frac{1+\mu}{1-\mu} \left\{ 8\mu \frac{z}{r} + \frac{r}{\delta} \left[1 + \mu + \frac{3}{4}(1-\mu) \left(\frac{R}{\delta} \right)^2 \right] \left[(1-\mu) + 2\mu \left(\frac{z}{r} \right)^2 \right] \right\} r. \quad (37)$$

Добавляя полученные формулы (37) к формулам (30), находим окончательные выражения для напряжений и перемещений в плите-перемычке

$$\sigma_{rr} = -\frac{4p_y}{2(1-\mu)} + \frac{p_y}{8} \left\{ \frac{2-5\mu-\mu^2}{1-\mu} - \frac{3}{4} \left[(1+\mu) \left(\frac{R}{\delta} \right)^2 - (3+\mu) \left(\frac{r}{\delta} \right)^2 \right] - (2+\mu) \left(\frac{z}{\delta} \right)^2 \right\} \frac{z}{\delta},$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -\frac{4p_y}{2(1-\mu)} + \frac{p_y}{8} \left\{ \frac{2-5\mu-\mu^2}{1-\mu} - \frac{3}{4} \left[(1+\mu) \left(\frac{R}{\delta} \right)^2 - (1+3\mu) \left(\frac{r}{\delta} \right)^2 \right] - (2+\mu) \left(\frac{z}{\delta} \right)^2 \right\} \frac{z}{\delta},$$

$$\sigma_{zz} = -\frac{p_y}{4} \left[2 + 3\frac{z}{\delta} - \left(\frac{z}{\delta} \right)^3 \right], \quad \sigma_{rz} = \frac{3p_y}{8} \left[1 - \left(\frac{z}{\delta} \right)^2 \right] \frac{r}{\delta},$$

$$u_r = -\frac{(1+\mu)p_y}{32E\delta^3} [3(1-\mu)(R^2 - r^2) - 4(2-\mu)(\delta^2 - z^2)] r \cdot z,$$

$$u_z = -\frac{(1+\mu)p_y}{2E} (\delta + z) - \frac{3(1+\mu)p_y}{128E\delta^3} \left\{ (1-\mu)(R^2 - r^2) + \frac{16}{3}(2-\mu)\delta^2 \right\} (R^2 - r^2) + 4 \left[\mu(R^2 - 2r^2) - 4 \left(1 - \frac{\mu(1+\mu)}{6(1-\mu)} \right) \delta^2 + \frac{2}{3}(1+\mu)(\delta^2 + z^2) \right] (\delta^2 - z^2). \quad (38)$$

По формулам (38) выполнены вычислительные процедуры и построены графики напряжений в плите-перемычке при следующих исходных данных: $\mu = 0,3; p_y = 2$ МПа;

$R = 1,75$ м; $\delta = 1,15$ м. На графиках представлены безразмерные напряжения $\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} / p_y$, показанные на рис. 2 и 3.

Анализируя графики зависимости напряжений от продольной координаты z (рис. 2), замечаем, что график функции $\bar{\sigma}_{rz}(z)$ представляет собой выпуклую кривую, симметричную относительно срединного поперечного сечения. Следовательно, наибольшие касательные напряжения σ_{rz} возникают в точках срединного поперечного сечения на расстоянии $r = R$ от продольной оси плиты-перемычки. Из четвертой формулы (38) видно, что с уменьшением координаты r напряжения σ_{rz} пропорционально уменьшаются, а при $r = 0$ становятся равными нулю.

Функция $\bar{\sigma}_{zz}(z)$ монотонно изменяется от -1 до 0 на всем рассматриваемом интервале $z \in [-\delta; +\delta]$. При этом график функции $\bar{\sigma}_{zz}(z)$ представляет собой кривую с изменяющейся кривизной. Так, на отрезке $z \in [-\delta; 0]$ кривая является выпуклой, а на отрезке $z \in [0; \delta]$ – вогнутой, при этом точка $z = 0$ является точкой перегиба кривой. Обратим внимание, что напряжения σ_{zz} не зависят от координаты r , что полностью согласуется с третьим допущением.

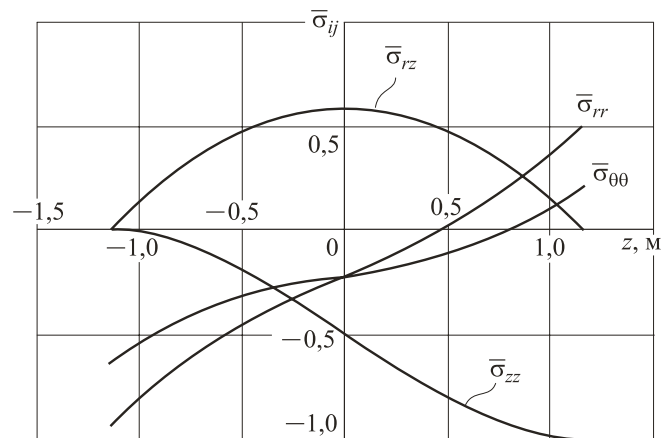


Рис. 2 Зависимости безразмерных напряжений в перемычке от координаты z при $r = R$

Fig. 2 Dependences of dimensionless stresses in the jumper on the z coordinate at $r = R$

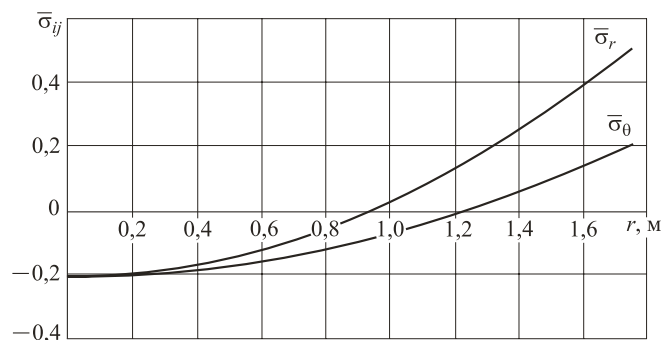


Рис. 3 Зависимости безразмерных напряжений в перемычке от координаты r в правом торцевом сечении при $z = \delta$

Fig. 3 Dependences of dimensionless stresses in the jumper on the coordinate r in the right end section at $z = \delta$

Наоборот, функции $\bar{\sigma}_{rr}(z), \bar{\sigma}_{\theta\theta}(z)$, монотонно возрастают на отрезке $z \in [-\delta; +\delta]$, а их графики в точке $z = 0$ также изменяют кривизну с выпуклости на вогнутость. Особо

отметим, что функции $\bar{\sigma}_{rr}(z)$, $\bar{\sigma}_{\theta\theta}(z)$, являются знакопеременными. Так, в точке $z = 0,455$ м напряжения $\bar{\sigma}_{rr}(z) = 0$ и, следовательно, на участке $z \in [-\delta; 0,455\text{м}]$ функция $\bar{\sigma}_{rr}(z)$ отрицательная, и значит, на этом участке напряжения σ_{rr} сжимающие. На участке $z \in [0,455\text{м}; \delta]$ функция $\bar{\sigma}_{rr}(z)$ положительная и, следовательно, напряжения σ_{rr} растягивающие. Сказанное справедливо и для напряжений $\sigma_{\theta\theta}$, которые на участке $z \in [-\delta; 0,8\text{м}]$ являются сжимающими, а на участке $z \in [0,8\text{м}; \delta]$ – растягивающими.

Графики функций $\bar{\sigma}_{rr}(r)$, $\bar{\sigma}_{\theta\theta}(r)$, показанные на рис. 3, представляют собой монотонно возрастающие вогнутые кривые. Соответственно, в точках $r = 0,942$ м, $r = 1,242$ м функции $\bar{\sigma}_{rr}(r)$, $\bar{\sigma}_{\theta\theta}(r)$, становятся равными нулю. В связи с этим на участках $r \in [0; 0,942\text{м}]$, $r \in [0; 1,242\text{м}]$ функции $\bar{\sigma}_{rr}(r)$, $\bar{\sigma}_{\theta\theta}(r)$, имеют отрицательные значения и, значит, напряжения σ_{rr} и $\sigma_{\theta\theta}$ сжимающие, а на участках $r \in [0,942\text{м}; R]$, $r \in [1,242\text{м}; R]$ данные функции положительные, а напряжения растягивающие.

Заключение

Основные результаты работы сводятся к следующему:

- модель шахтной перемычки представлена расчетной схемой толстой плиты цилиндрической формы, для которой сформулирована краевая задача;
- решения краевой задачи построены с помощью функций напряжений, удовлетворяющих уравнению Лапласа;
- на базе полученных решений представлены формулы для компонентов напряженного состояния и построены их графики, анализ которых показал:
 - нормальные напряжения, действующие вдоль оси z перемычки, монотонно изменяются от $-p_y$ до нуля на всем рассматриваемом интервале z .
 - нормальные напряжения, действующие в радиальном и окружном направлении поперечного сечения перемычки, являются знакопеременными функциями. В точках $z = 0,4553$ м и $z = 0,8$ м соответственно радиальные и окружные напряжения равны нулю. При $z < 0,4553$ м и $z < 0,8$ м эти напряжения являются сжимающими, а при $z > 0,4553$ м и $z > 0,8$ м – растягивающими.

Список литературы

1. Линденау Н.И., Маевская В.М., Крылов В.Ф. *Происхождение, профилактика и тушение эндогенных пожаров в угольных шахтах*. М.: Недра; 1977. 320 с.
2. Chanyshv A.I. A method to determine a body's thermal state. *Journal of Mining Science*. 2012;48(4):660–668. <https://doi.org/10.1134/S1062739148040107>
3. Зыков В.С. О механизме формирования выбросоопасной ситуации в очистном забое угольной шахты. *Маркшейдерский вестник*. 2016;(5):44–48.
4. Черданцев С.В., Шлапаков П.А., Лебедев К.С., Шлапаков Е.А. Об одном подходе к расчету выброса угля из газоносного пласта, вмещающего геологические нарушения. *Безопасность труда в промышленности*. 2019;(8):13–18. <https://doi.org/10.24000/0409-2961-2019-5-20-26>
5. Черданцев С.В., Шлапаков П.А., Шлапаков Е.А., Лебедев К.С., Ерастов А.Ю. Теплофизические и газодинамические условия протекания процессов дефлаграции и детонации в пылегазовоздушных потоках горных выработок вблизи очагов самонагревания. *Химическая физика и мезоскопия*. 2019;21(2):179–189. <https://doi.org/10.15350/17270529.2019.2.20>
6. Черданцев С.В., Шлапаков П.А., Лебедев К.С., Колыхалов В.В. Формирование детонационного процесса при внезапном выбросе газа в горную выработку со сверхзвуковой скоростью. *Горный информационно аналитический бюллетень*. 2019;(7):62–73. <https://doi.org/10.25018/0236-1493-2019-07-0-62-73>
7. Kurlenya M.V., Skritsky V.A. Methane explosions and causes of their origin in highly productive sections of coal mines. *Journal of Mining Science*. 2017;53(5):861–867. <https://doi.org/10.1134/S1062739117052886>
8. Valger S.A., Fedorova N.N., Fedorov A.V. Mathematical modeling of propagation of explosion waves and their effect on various objects. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 2017;53(4):433–443. <https://doi.org/10.1134/S0010508217040074>
9. Zhuravlev V.Ph. Effect of inertia of elastic waves in elastic systems with axial symmetry. *Mechanics of Solids*. 2018;53(1):68–72. <https://doi.org/10.3103/S0025654418010089>
10. Fomin V.M., Postnikov B.V., Kolotilov V.A., Shalaev V.S., Shalaev Y.V., Florya N.F. Modeling shock wave processes in a mine opening with permeable barriers. *Journal of Mining Science*. 2019;55(1):18–22. <https://doi.org/10.1134/S106273911901524X>
11. Нургалиев Е.И. *Обоснование и разработка технологии изоляции пластовых выработок безвзрывовыми монолитными перемычками с одновременным возведением тампонажных завес: автореф. дис. ... канд. техн. наук*. Кемерово; 2021. 22 с.
12. Колтунов М.А., Васильев Ю.Н., Черных В.А. *Упругость и прочность цилиндрических тел*. М.: Высшая школа; 1975. 526 с.
13. Соляник-Красса К.В. *Осесимметричная задача теории упругости*. М.: Стройиздат; 1987. 336 с.
14. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. *Краткий курс математического анализа*. М.: Наука; 1967. 736 с.

References

1. Lindenau N.I., Maevskaya V.M., Krylov V.F. *Origin, prevention and suppression of endogenous fires in coal mines*. М.: Nedra; 1977. 320 p. (In Russ.)
2. Chanyshv A.I. A method to determine a body's thermal state. *Journal of Mining Science*. 2012;48(4):660–668. <https://doi.org/10.1134/S1062739148040107>
3. Zykov V.S. About the mechanism of formation of emission of the dangerous situation in the clearing face of the coal mine. *Mine Surveying Bulletin*. 2016;(5):44–48. (In Russ.)
4. Cherdantsev S.V., Shlapakov P.A., Lebedev K.S., Shlapakov E.A. Parameters of the shock front in the viscous gas-air mixture moving in the mine working. *Occupational Safety in Industry*. 2019;(8):13–18. (In Russ.) <https://doi.org/10.24000/0409-2961-2019-5-20-26>
5. Cherdantsev S.V., Shlapakov P.A., Shlapakov E.A., Lebedev K.S., Erastov A.Yu. Thermophysical and gas-dynamic conditions of

- deflagration and detonation processes in dust-gas-air flows of mine workings near the centers of self-heating. 2019;21(2):179–189. *Chemical Physics and Mesoscopy*. (In Russ.) <https://doi.org/10.15350/17270529.2019.2.20>
6. Cherdantsev S.V., Shlapakov P.A., Lebedev K.S., Kolykhalov V.V. Creation of detonation process during gas outburst in roadway at supersonic speed. *Mining Informational and Analytical Bulletin*. 2019;(7):62–73. (In Russ.) <https://doi.org/10.25018/0236-1493-2019-07-0-62-73>
7. Kurlenya M.V., Skritsky V.A. Methane explosions and causes of their origin in highly productive sections of coal mines. *Journal of Mining Science*. 2017;53(5):861–867. <https://doi.org/10.1134/S1062739117052886>
8. Valger S.A., Fedorova N.N., Fedorov A.V. Mathematical modeling of propagation of explosion waves and their effect on various objects. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 2017;53(4):433–443. <https://doi.org/10.1134/S0010508217040074>
9. Zhuravlev V.Ph. Effect of inertia of elastic waves in elastic systems with axial symmetry. *Mechanics of Solids*. 2018;53(1):68–72. <https://doi.org/10.3103/S0025654418010089>
10. Fomin V.M., Postinkov B.V., Kolotilov V.A., Shalaev V.S., Shalaev Y.V., Florya N.F. Modeling shock wave processes in a mine opening with permeable barriers. *Journal of Mining Science*. 2019;55(1):18–22. <https://doi.org/10.1134/S106273911901524X>
11. Nurgaliev E.I. Substantiation and development of technology for isolation of reservoir workings by bezrubovs monolithic lintels with simultaneous construction of grouting curtains: *abstract of the dissertation Cand. Sci. (Eng.)*. Kemerovo; 2021. 22 p. (In Russ.)
12. Koltunov M.A., Vasiliev Yu.N., Chernykh V.A. *Elasticity and strength of cylindrical bodies*. Moscow: Vysshaya shkola; 1975. 526 p. (In Russ.)
13. Solyanik-Krassa K.V. *Axisymmetric problem of elasticity theory*. Moscow: Stroyizdat; 1987. 336 p. (In Russ.)
14. Bermant A.F., Aramanovich I.G. *A short course of mathematical analysis*. Moscow: Nauka; 1967. 736 p. (In Russ.)

Информация об авторах

Черданцев Сергей Васильевич – доктор технических наук, главный научный сотрудник, АО «Научный центр ВостНИИ по промышленной и экологической безопасности в горной отрасли» (АО «НЦ ВостНИИ»), г. Кемерово, Российская Федерация, e-mail: svch01@yandex.ru

Шлапак Павел Александрович – кандидат технических наук, заведующий лабораторией, АО «Научный центр ВостНИИ по промышленной и экологической безопасности в горной отрасли» (АО «НЦ ВостНИИ»), г. Кемерово, Российская Федерация, e-mail: shlapak1978@mail.ru

Лебедев Кирилл Сергеевич – старший научный сотрудник, АО «Научный центр ВостНИИ по промышленной и экологической безопасности в горной отрасли» (АО «НЦ ВостНИИ»), г. Кемерово, Российская Федерация, e-mail: lebedevks1987@yandex.ru

Ерастов Антон Юрьевич – старший научный сотрудник, АО «Научный центр ВостНИИ по промышленной и экологической безопасности в горной отрасли» (АО «НЦ ВостНИИ»), г. Кемерово, Российская Федерация, e-mail: eractov_a_y@mail.ru

Хаймин Сергей Александрович – старший научный сотрудник, АО «Научный центр ВостНИИ по промышленной и экологической безопасности в горной отрасли» (АО «НЦ ВостНИИ»), г. Кемерово, Российская Федерация, e-mail: hsa007@mail.ru

Information about the authors

Sergei V. Cherdantsev – Dr. Sci. (Eng.), Leading Researcher, Scientific Centre VOSTNII on industrial and ecological safety in mountain industry (JSC “NC VOSTNII”), Kemerovo, Russian Federation, e-mail: svch01@yandex.ru

Pavel A. Shlapakov – Cand. Sci. (Eng.), Laboratory Head, Scientific Centre VOSTNII on industrial and ecological safety in mountain industry (JSC “NC VOSTNII”), Kemerovo, Russian Federation, e-mail: shlapak1978@mail.ru

Kirill S. Lebedev – Senior Researcher, Scientific Centre VOSTNII on industrial and ecological safety in mountain industry (JSC “NC VOSTNII”), Kemerovo, Russian Federation, e-mail: lebedevks1987@yandex.ru

Anton Yu. Erastov – Senior Researcher, Scientific Centre VOSTNII on industrial and ecological safety in mountain industry (JSC “NC VOSTNII”), Kemerovo, Russian Federation, e-mail: eractov_a_y@mail.ru

Sergei A. Khaymin – Senior Researcher, Scientific Centre VOSTNII on industrial and ecological safety in mountain industry (JSC “NC VOSTNII”), Kemerovo, Russian Federation, e-mail: hsa007@mail.ru

Article info

Received: 26.01.2023

Revised: 08.02.2023

Accepted: 09.02.2023

Информация о статье

Поступила в редакцию: 26.01.2023

Поступила после рецензирования: 08.02.2023

Принята к публикации: 09.02.2023