

# Исследование прочностных свойств и удельной энергии деформирования горных пород в условиях трехосного сжатия

Н.Н. Кузнецов✉

Горный институт Кольского научного центра Российской академии наук, г. Апатиты, Российская Федерация

✉ n.kuznecov@ksc.ru

**Резюме:** Одним из наиболее востребованных видов испытаний образцов пород в настоящее время является трехосное сжатие. С его помощью можно в лабораторных условиях воссоздавать характерные для массива пород варианты распределения главных сжимающих напряжений как по направлению, так и по величине. При этом наиболее часто используют схему нагружения, когда изменяется максимальная компонента сжимающих напряжений, а промежуточная и минимальная равны между собой и остаются постоянными в ходе испытания (вариант трехосного осесимметричного сжатия). В работе приведены результаты исследований, направленных на установление закономерности изменения пределов прочности скальных пород и их удельной энергии деформирования при нагружении в условиях трехосного осесимметричного сжатия. Проанализированы результаты испытаний восьми типов скальных пород месторождений Кольского региона. Показано, что в условиях трехосного осесимметричного сжатия с возрастанием бокового давления будут также возрастать значения пределов прочности образцов и их критические значения удельной энергии деформирования. Установлены закономерности изменения исследуемых характеристик пород с увеличением бокового давления.

**Ключевые слова:** скальные горные породы, трехосное осесимметричное сжатие, прочность, удельная энергия деформирования, напряжение, образец

**Благодарности:** Автор выражает благодарность ведущему инженеру Горного института КНЦ РАН А.К. Паку за содействие в проведении лабораторных испытаний образцов горных пород.

**Для цитирования:** Кузнецов Н.Н. Исследование прочностных свойств и удельной энергии деформирования горных пород в условиях трехосного сжатия. *Горная промышленность*. 2025;(2):140–145. <https://doi.org/10.30686/1609-9192-2025-2-140-145>

## Investigation of strength properties and specific strain energy of rocks under triaxial compression

N.N. Kuznetsov✉

Mining Institute, Kola Science Centre of the Russian Academy of Sciences, Apatity, Russian Federation

✉ n.kuznecov@ksc.ru

**Abstract:** One of the most demanded types of testing rock samples nowadays is triaxial compression. It helps to recreate in laboratory conditions various distributions of the main compressive stresses characteristic for a rock mass both in direction and magnitude. In this case, the most commonly used loading pattern is when the maximum component of the compressive stresses changes, while the intermediate and the minimum ones are equal to each other and remain constant during the test (a variant of triaxial axisymmetric compression). The paper presents the results of studies aimed at identifying the change patterns in the compressive strength of rocks and their specific strain energy under triaxial axisymmetric load. The results of tests on eight types of rocks from deposits in the Kola region have been analyzed. It is shown that in conditions of triaxial axisymmetric compression with increasing lateral pressure, the values of the compressive strength of the samples and their critical values of specific strain energy will also increase. The regularities of changes in the investigated rock characteristics with increasing lateral pressure have been established.

**Keywords:** : hard rocks, triaxial axisymmetric compression, strength, specific strain energy, stress, sample

**Acknowledgements:** The author expresses his gratitude to the leading engineer of the Mining Institute of the Kola Science Centre of the Russian Academy of Sciences A.K. Pak for his assistance in conducting laboratory tests of the rock samples.

**For citation:** Kuznetsov N.N. Investigation of strength properties and specific strain energy of rocks under triaxial compression. *Russian Mining Industry*. 2025;(2):140–145. (In Russ.) <https://doi.org/10.30686/1609-9192-2025-2-140-145>

## Введение

Выполняемые в лабораторных условиях на образцах горных пород экспериментальные исследования не теряют своей актуальности. В основном это связано с тем, что изучение свойств пород в натуральных условиях очень трудоемко и не удастся охватить все имеющиеся литотипы на исследуемом участке массива. Именно в лабораторных экспериментах можно достаточно просто и наглядно изучать происходящие в массиве пород процессы и выявлять влияющие на них факторы [1–8]. При этом в большей степени соответствует реальному массиву вариант нагружения образцов при трехосном сжатии. В этом случае воссоздаются действующие в трех направлениях главные напряжения  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ .

В массиве пород наиболее часто напряжения распределяются по следующей схеме:  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ , или  $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$  [9–15]. В лабораторных экспериментах для создания таких условий применяют установки, позволяющие испытывать образцы при истинном (неравнокомпонентном) трехосном сжатии. Но разработка таких установок зачастую связана с ограничениями в виде их высокой стоимости и возможности создания высоких нагрузок (более 500 кН). В связи с этим в ходе лабораторных исследований чаще применяют установки трехосного осесимметричного сжатия ( $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$ ). Сущность испытания образцов пород в таких условиях заключается в создании фиксированного бокового сжимающего напряжения на образец ( $\sigma_2 = \sigma_3$ ) и постепенного увеличения осевого напряжения  $\sigma_1$  вплоть до разрушения образца.

В данной работе приведены результаты исследований, направленных на установление закономерности изменения прочностных свойств пород и их удельной энергии деформирования в условиях трехосного осесимметричного сжатия. С этой целью проведено обобщение и структурирование полученных ранее экспериментальных данных о физико-механических свойствах скальных пород месторождений Кольского региона [16–18].

## Методика и объект исследований

Для анализа выбраны экспериментальные данные, полученные при испытаниях восьми литотипов скаль-

ных пород Кольского региона: уртит среднезернистый массивный, линзовидно-полосчатая апатит-нефелиновая руда и ийолит-уртит нечетко-трахитоидный м-ср/з (апатит-нефелиновые месторождения Хибинского массива); кальцитовый карбонатит и пироксенит (Ковдорское месторождение магнетитовых и апатитовых руд); диабаз, рудный перидотит и туфогенно-осадочная порода (Ждановское месторождение медно-никелевых руд). Основные физико-механические свойства этих пород представлены в табл. 1.

Экспериментальные данные получены на образцах пород с отношением высоты к диаметру 2:1 (высота составляла 95 и 122 мм, а диаметр 47,5 и 61 мм соответственно). Испытания в условиях трехосного осесимметричного сжатия выполняли на сервогидравлических установках MTS 815 и MTS 816 в режиме заданной скорости осевого деформирования 0,3 мм/с при изменении величины бокового давления ( $\sigma_2 = \sigma_3$ ) от 5 до 80 МПа [16–18]. На основании полученных результатов определяли значения пределов прочности образцов при сжатии и их критические значения удельной энергии деформирования (1), (2).

$$W_{\text{сж}} = \frac{\sigma_{\text{сж}}^2}{2E}; \quad (1)$$

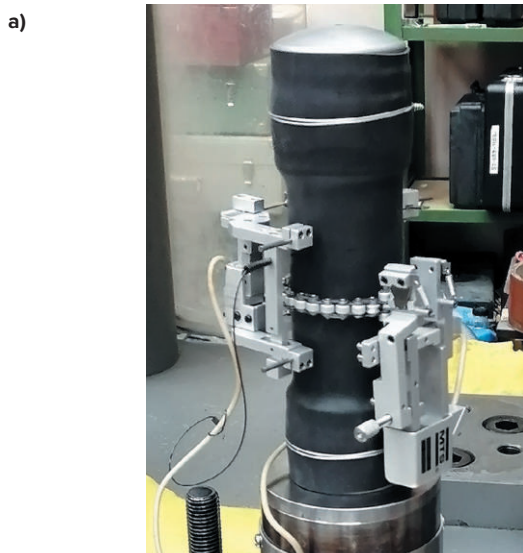
$$W_{\text{тр}} = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)}{2E}, \quad (2)$$

где  $W_{\text{сж}}$ ,  $W_{\text{тр}}$  – критические значения удельной энергии деформирования пород при одноосном и трехосном сжатии;  $\sigma_{\text{сж}}$  – предел прочности при одноосном сжатии, МПа;  $E$  – модуль упругости, МПа;  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  – максимальное, промежуточное и минимальное напряжения при разрушении горной породы (при испытании образца породы в условиях трехосного сжатия  $\sigma_1$  соответствует его пределу прочности, а  $\sigma_2 = \sigma_3$  – боковое давление на образец в момент его разрушения/на пределе прочности).

Таблица 1  
Основные физико-механические свойства исследуемых скальных пород

Table 1  
Basic physical and mechanical properties of the investigated hard rocks

Порода	Плотность, г/см <sup>3</sup>	Предел прочности при сжатии, МПа	Предел прочности при растяжении, МПа	Модуль упругости, ГПа	Коэффициент Пуассона	Критическое значение удельной энергии деформирования, МДж/м <sup>3</sup>
Уртит	2,76	174	9,3	72,20	0,28	0,21
Апатит-нефелиновая руда	2,91	147	5,2	65,60	0,20	0,16
Ийолит-уртит	2,88	219	8,3	88,69	0,22	0,28
Карбонатит	2,72	50	4,6	48,80	0,22	0,03
Пироксенит	3,00	115	7,1	65,69	0,22	0,10
Диабаз	2,90	158	10,3	87,43	0,11	0,14
Перидотит	2,96	252	10,7	79,32	0,14	0,40
Туфогенно-осадочная порода	2,82	72	8,4	60,27	0,16	0,04



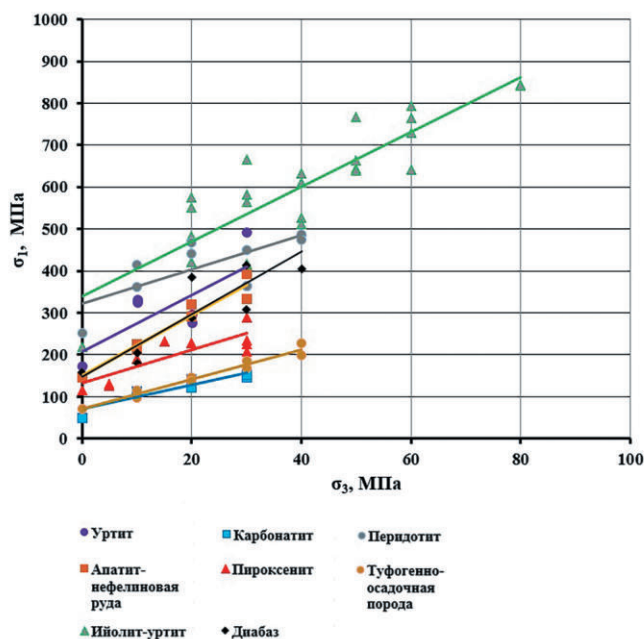
**Рис. 1**  
Испытание образца ийолит-уртита в условиях трехосного осесимметричного сжатия:  
а – образец, подготовленный для испытания;  
б – образец после испытания

**Fig. 1**  
Testing of ijolite-urtite sample under triaxial axisymmetric compression:  
а – a sample ready for testing;  
б – a sample after testing

Результаты испытаний образцов пород использовали для построения графиков зависимостей значений пределов прочности и удельной энергии деформирования от значений минимальной компоненты главных сжимающих напряжений  $\sigma_3$  и последующего их анализа.

### Результаты и обсуждение

В ходе анализа экспериментальных данных, полученных в работах [16–18], установлено, что пределы прочности образцов всех исследуемых пород в условиях трехосного осесимметричного сжатия возрастают с увеличением бокового давления. Наглядно это продемонстрировано на рис. 2. При боковом давлении 10 МПа прочность образцов некоторых типов пород (уртит, карбонатит) увеличилась в 2 раза по сравнению с прочностью при одноосном сжатии, а при боковом давлении 30 МПа увеличилась



**Рис. 2**  
Зависимость максимальной компоненты главных сжимающих напряжений (предела прочности) от минимальной (бокового давления) при нагружении горных пород в условиях трехосного осесимметричного сжатия

**Fig. 2**  
Dependence of the maximum component of the principal compressive stresses (compressive strength) on the minimum component (lateral pressure) under triaxial axisymmetric compression

в 2–3 раза. Образцы ийолит-уртита испытывали при давлении до 80 МПа, их прочность по сравнению с одноосным сжатием возросла в 4 раза и составила 843 МПа [18].

Для рассчитанных на основании данных в [16–18] критических значений удельной энергии деформирования пород выявлено, что, как и в случае с прочностью, они возрастают с увеличением бокового давления (рис. 3). При величине бокового давления 10 МПа критические значения удельной энергии увеличились в 2–4 раза по сравнению с этими значениями при одноосном сжатии, а при боковом давлении 30 МПа – в 4–8 раз. Для образцов ийолит-уртита установлено, что при давлении 80 МПа в условиях трехосного сжатия удельная энергия возросла в 13 раз и составила 3,7 МДж/м<sup>3</sup>.

В целом, при анализе характера изменения значений пределов прочности и удельной энергии деформирования в условиях трехосного сжатия выявлено, что несмотря на общую тенденцию увеличения изучаемых характеристик с ростом бокового давления именно последняя увеличивается в большей мере (рис. 4). Так, при боковом давлении 20 МПа прочность пород в среднем увеличилась в 2 раза по сравнению с прочностью при одноосном сжатии, а критическое значение удельной энергии деформирования – в 4 раза. При боковом давлении 80 МПа эти характеристики увеличились в 4 и 13 раз соответственно. Следовательно, чем больше будет обжатие, тем больше будет энергии запасаться в образце породы при нагружении и тем больше ее может выделиться при разрушении.

Зависимости, представленные на рис. 4, можно применять в качестве номограмм для определения пределов



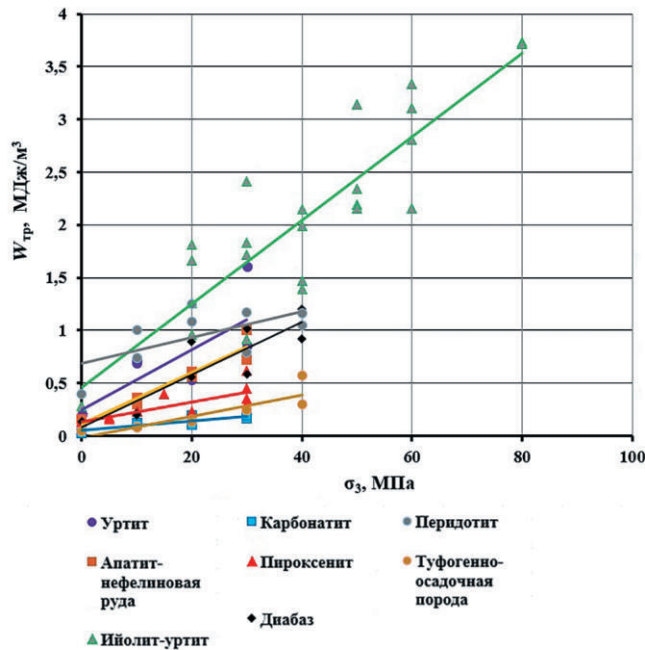


Рис. 3  
Зависимость критических значений удельной энергии деформирования горных пород от минимальной компоненты главных сжимающих напряжений (бокового давления) при нагружении в условиях трехосного осесимметричного сжатия

Fig. 3  
Dependence of the critical values of specific strain energy of rocks on the minimum component of the main compressive stresses (lateral pressure) under triaxial axisymmetric compression

прочности и критических значений удельной энергии деформирования образцов при заданном значении бокового давления. Например, если предел прочности  $\sigma_{сж}$  при одноосном сжатии образцов породы в среднем составляет 100 МПа, то при боковом давлении 20 МПа прочность  $\sigma_1$  этой породы будет больше  $\sigma_{сж}$  в два раза и составит 200 МПа, а при боковом давлении 80 МПа  $\sigma_1$  составит 400 МПа. То же самое справедливо и для критических значений удельной энергии деформирования ( $W_{тр}/W_{сж}$ ). Но, чтобы параметризовать полученные зависимости, необходимо привести в соответствие их размерности. На оси ординат расположены безразмерные величины, тогда как на оси абсцисс – МПа. Один из вариантов приведения их в соответствие – это полный уход от размерностей, чего можно достигнуть отнесением минимальной компоненты напряжений к пределу прочности при одноосном сжатии ( $\sigma_3/\sigma_{сж}$ ). В этом случае для одного типа породы  $\sigma_{сж}$  будет постоянной величиной, а меняться будет значение  $\sigma_3$ . Тогда графики, представленные на рис. 4, преобразуются в следующие (рис. 5).

Графики на рис. 5 характеризуют закономерности изменения значений пределов прочности и критических значений удельной энергии деформирования скальных горных пород в условиях трехосного осесимметричного сжатия, которые могут быть выражены формулами (3) и (4).

$$\sigma_1 = 7,34\sigma_3 + \sigma_{сж}; \quad (3)$$

$$W_{тр} = (27,73\sigma_3/\sigma_{сж} + 1)W_{сж}. \quad (4)$$

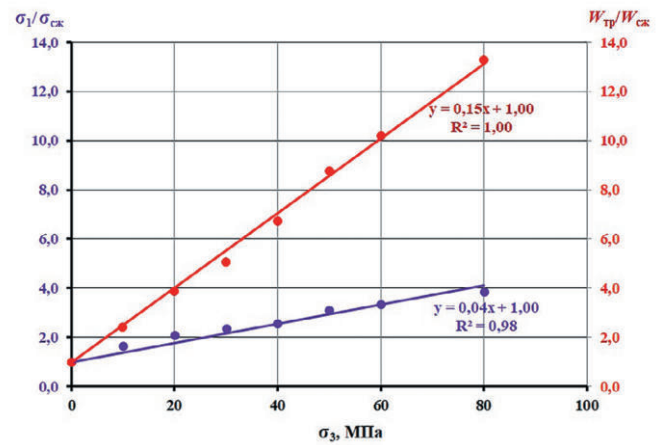


Рис. 4  
Изменение значений пределов прочности и критических значений удельной энергии деформирования горных пород при нагружении их в условиях трехосного осесимметричного сжатия

Fig. 4  
Changes in the values of compressive strength and the critical values of specific strain energy of rocks under triaxial axisymmetric compression

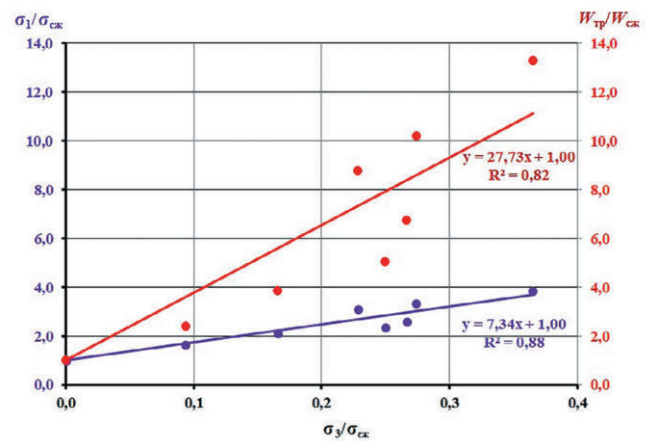


Рис. 5  
Закономерности изменения значений пределов прочности и критических значений удельной энергии деформирования горных пород при нагружении их в условиях трехосного осесимметричного сжатия

Fig. 5  
The regularities of changes in the values of compressive strength and the critical values of specific strain energy of rocks under triaxial axisymmetric compression

Особенность полученных закономерностей заключается в том, что их можно использовать для оценки изменения прочностных характеристик пород и их удельной энергии деформирования в условиях трехосного осесимметричного сжатия, когда имеются только результаты испытаний образцов при одноосном сжатии. При этом следует отметить, что формулы (3), (4) справедливы в диапазоне изменения значений пределов прочности при одноосном сжатии от 50 до 220 МПа, а удельной энергии деформирования от 0,03 до 0,40 МДж/м³.

## Выводы

В результате выполненной работы сделаны следующие основные выводы:

1. Проанализированы результаты испытаний образцов восьми типов скальных пород месторождений Кольского региона в условиях трехосного осесимметричного сжатия.
2. Выявлено, что с возрастанием бокового давления прочность образцов пород увеличивается в сравнении с прочностью при одноосном сжатии: при боковом давлении 10 МПа – в 2 раза, при боковом давлении 30 МПа – в 2–3 раза, а при боковом давлении 80 МПа – в 4 раза.
3. Показано, что, как и в случае с прочностью, критические значения удельной энергии деформирования увеличиваются с возрастанием бокового давления: при давлении 10 МПа – в 2–4 раза по сравнению с одноосным сжатием, при 30 МПа – в 4–8 раз, а при давлении 80 МПа – в 13 раз.

4. Установлены закономерности, показывающие изменение значений пределов прочности и критических значений удельной энергии деформирования скальных горных пород в условиях трехосного осесимметричного сжатия. Их можно использовать для оценки изменения этих характеристик пород, когда имеются только результаты испытаний образцов при одноосном сжатии в диапазоне изменения значений пределов прочности от 50 до 220 МПа, а удельной энергии деформирования от 0,03 до 0,40 МДж/м<sup>3</sup>.

## Список литературы / References

1. Ставрогин А.Н., Тарасов Б.Г. *Экспериментальная физика и механика горных пород*. СПб.: Наука; 2001. 343 с.
2. Лодус Е.В., Гончаров Е.В. Физическое моделирование энергообмена в массиве горных пород. *Записки Горного института*. 2010;185:64–67. Режим доступа: <https://pmi.spmi.ru/pmi/article/view/6772> (дата обращения: 17.01.2025).  
Lodus E.V., Goncharov E.V. Physical modeling of energy exchange in rock mass. *Journal of Mining Institute*. 2010;185:64–67. (In Russ.) Available at: <https://pmi.spmi.ru/pmi/article/view/6772> (accessed: 17.01.2025).
3. Коршунов В.А., Павлович А.А., Бажуков А.А. Оценка сдвиговой прочности горных пород по трещинам на основе результатов испытаний образцов сферическими инденторами. *Записки Горного института*. 2023;262:606–618. <https://doi.org/10.31897/PMI.2023.16>  
Korshunov V.A., Pavlovich A.A., Bazhukov A.A. Evaluation of the shear strength of rocks by cracks based on the results of testing samples with spherical indentors. *Journal of Mining Institute*. 2023;262:606–618. <https://doi.org/10.31897/PMI.2023.16>
4. Ильинов М.Д., Коршунов В.А., Поспехов Г.Б., Шоков А.Н. Комплексные экспериментальные исследования механических свойств горных пород: проблемы и пути их решения. *Горный журнал*. 2023;(5):11–18. <https://doi.org/10.17580/gzh.2023.05.02>  
Ilinov M.D., Korshunov V.A., Pospekhov G.B., Shokov A.N. Integrated experimental research of mechanical properties of rocks: Problems and solutions. *Gornyi Zhurnal*. 2023;(5):11–18. (In Russ.) <https://doi.org/10.17580/gzh.2023.05.02>
5. Tarasov B. Dramatic weakening and embrittlement of intact hard rocks in the earth's crust at seismic depths as a cause of shallow earthquakes. In: Nawaz M., Sattar F., Kundu S.N. (eds) *Earth Crust*. IntechOpen; 2019. <https://doi.org/10.5772/intechopen.85413>
6. Jaeger J.C., Cook N.G.W., Zimmerman R.W. *Fundamentals of Rock Mechanics*. 4<sup>th</sup> ed. Wiley-Blackwell; 2007. 488 p.
7. Khadivi B., Masoumi H., Heidarpour A., Zhang Q., Zhao J. Assessing the fracturing process of rocks based on burst-brittleness ratio (BBR) governed by point load testing. *Rock Mechanics and Rock Engineering*. 2023;56(11):8167–8189. <https://doi.org/10.1007/s00603-023-03491-0>
8. Zhang K., Wang W., Cao Y., Duan X., Zheng Z., Zhu Q. Experimental investigations of the rock brittleness evaluation under different loading conditions. *Rock Mechanics and Rock Engineering*. 2025;58(2):1473–1502. <https://doi.org/10.1007/s00603-024-04265-y>
9. Козырев А.А. Геомеханическое обеспечение горных работ при отработке удароопасных месторождений в тектонически напряженных массивах. В кн.: Мельников Н.Н. (ред.) *Геомеханика при ведении горных работ в высоконапряженных массивах: сб. науч. тр.* Апатиты: КНЦ РАН; 1998. С. 11–25.

10. Рассказов И.Ю., Потапчук М.И., Аникин П.А., Гладырь А.В., Цициашвили Г.Ш. Исследование формирования очагов разрушения в удароопасных массивах горных пород месторождений востока России. В кн.: Курилко А.С. (ред.) *Геомеханические и геотехнологические проблемы эффективного освоения месторождений твердых полезных ископаемых северных и Северо-Восточных регионов России: сб. науч. тр.* Якутск: Институт мерзлотоведения им. П.И. Мельникова СО РАН; 2014. С. 23–29.
11. Семенова И.Э., Аветисян И.М. Прогноз удароопасности перспективных участков отработки Хибинской апатитовой дуги. *Горная промышленность*. 2023;(S1):43–47. <https://doi.org/10.30686/1609-9192-2023-S1-43-47>  
Semenova I.E., Avetisyan I.M. Prediction of rockburst hazards in prospective mining areas of the Khibiny Apatite Arc. *Russian Mining Industry*. 2023;(1 Suppl.):00–00. <https://doi.org/10.30686/1609-9192-2023-S1-43-47>
12. Сентябов С.В., Карамнов Д.В. Методы определения первоначальных напряжений массива горных пород натурными измерениями. *Проблемы недропользования*. 2023;(1): 54–63. <https://doi.org/10.25635/2313-1586.2023.01.054>  
Sentyabov S.V., Karamnov D.V. Methods for determining the initial stresses of the rock massif by in-situ measurements. *Problems of Subsoil Use*. 2023;(1):54–63. <https://doi.org/10.25635/2313-1586.2023.01.054>
13. Li J., Liu D., He M., Guo Y. True triaxial experimental study on the variation characteristics of rockburst with the number of fast unloading surfaces. *Rock Mechanics and Rock Engineering*. 2023;56(8):5585–5606. <https://doi.org/10.1007/s00603-023-03311-5>
14. Liu X., Yu J., Zhang J., Yao W., Cai Y., Zhou X. Anisotropic time-dependent deformation and damage constitutive model of rock under true triaxial compression. *Mechanics of Time-Dependent Materials*. 2024;28:2177–2203. <https://doi.org/10.1007/s11043-023-09617-9>
15. Gu L., Zhou Y., Xiao Y., Zhang Y., Wang Z. Effect of initial stress difference on hard rock fracture mechanism under true triaxial excavation unloading stress paths. *Rock Mechanics and Rock Engineering*. 2024;57(12):10205–10227. <https://doi.org/10.1007/s00603-024-04090-3>
16. Кузнецов Н.Н. *Исследование энергоемкости разрушения скальных горных пород с целью оценки их удароопасности (на примере месторождений Кольского региона): автореф. дис. ... канд. техн. наук.* Апатиты; 2021. 25 с. Режим доступа: [https://diss.igduran.ru/sites/default/files/disser/kuznetcov/kuznetcov\\_avtoreferat.pdf](https://diss.igduran.ru/sites/default/files/disser/kuznetcov/kuznetcov_avtoreferat.pdf) (дата обращения: 17.01.2025).
17. Козырев А.А., Кузнецов Н.Н., Шоков А.Н. Оценка удароопасности скальных горных пород Ждановского месторождения (Кольский полуостров). *Горная промышленность*. 2022;(6):75–82. <https://doi.org/10.30686/1609-9192-2022-6-75-82>  
Kozyrev A.A., Kuznetcov N.N., Shokov A.N. Rockburst hazard assessment of hard rocks in the Zhdanovskoe deposit (Kola Peninsula). *Russian Mining Industry*. 2022;(6):75–82. (In Russ.) <https://doi.org/10.30686/1609-9192-2022-6-75-82>
18. Кузнецов Н.Н., Пак А.К. Исследование физико-механических свойств ийолит-уртита в условиях одноосного и трехосного сжатия. *Горная промышленность*. 2024;(2):127–133. <https://doi.org/10.30686/1609-9192-2024-2-127-133>  
Kuznetcov N.N., Pak A.K. Investigation of physical and mechanical properties of ijolite-urtite under uniaxial and triaxial compression. *Russian Mining Industry*. 2024;(2):127–133. (In Russ.) <https://doi.org/10.30686/1609-9192-2024-2-127-133>

#### Информация об авторе

Кузнецов Николай Николаевич – кандидат технических наук, руководитель лаборатории инструментальных исследований состояния горных пород Арктической зоны РФ, отдел геомеханики, Горный институт Кольского научного центра Российской академии наук, г. Апатиты, Российская Федерация; <https://orcid.org/0000-0002-0624-4351>; e-mail: n.kuznecov@ksc.ru

#### Information about the author

Nikolai N. Kuznetcov – Cand. Sci. (Eng.), Head of the Laboratory of Instrumental Study of Rock's State of the Russian Arctic Region, Department of Rock Mechanics, Mining Institute Kola Science Centre of the Russian Academy of Sciences, Apatity, Russian Federation; <https://orcid.org/0000-0002-0624-4351>; e-mail: n.kuznecov@ksc.ru

#### Информация о статье

Поступила в редакцию: 03.02.2025  
Поступила после рецензирования: 03.03.2025  
Принята к публикации: 10.03.2025

#### Article info

Received: 03.02.2025  
Revised: 03.03.2025  
Accepted: 10.03.2025