Оригинальная статья / Original Paper

https://doi.org/10.30686/1609-9192-2025-5-84-90

Совершенствование алгоритма для расчета напряженно-деформированного состояния массива пород при измерении деформаций методом разгрузки напряжений на торце скважины

И.Э. Семенова[1], П.В. Амосов[2], Н.Н. Кузнецов[1]✉, В.А. Некрасов[1]
[1] Горный институт Кольского научного центра Российской академии наук, г. Апатиты, Российская Федерация
[2] Институт проблем промышленной экологии Севера Кольского научного центра Российской академии наук, г. Апатиты, Российская Федерация
✉ n.kuznecov@ksc.ru

Резюме: Статья представляет собой продолжение изложения результатов исследований по расчету параметров напряженно-деформированного состояния массива пород на основе данных натурных измерений. Предложен алгоритм, позволяющий объединить подходы Горного института Кольского научного центра РАН и E.R. Leeman, для расчета напряжений, действующих в массиве пород и определяемых на основании данных, полученных методом разгрузки в варианте торцевых измерений. Приведен математический аппарат для расчета компонент тензора напряжений в плоскости поверхности забоя трех взаимно перпендикулярных скважин, когда выбор направлений двух из них совпадает с направлениями главных напряжений на торце забоя третьей скважины. Проанализирована ситуация использования четырехдатчиковой розетки для схемы размещения тензодатчиков с углами 0, 60, 120 и 90°.
Представлены два возможных алгоритма расчета для вычисления нормальных компонент напряжений, а также результаты расчетов на базе экспериментальных данных, полученных при проведении измерений напряженно-деформированного состояния в массиве пород Ждановского месторождения.
Выполнен сравнительный анализ полученных прогнозных значений максимальных и минимальных напряжений по критерию отклонения на ±10% от среднего. Применение метода наименьших квадратов дает значения максимальных и минимальных напряжений, близкие к результатам перебора 16 комбинаций.

Ключевые слова: напряженно-деформированное состояние, массив горных пород, метод полной разгрузки напряжений, скважина, розетка тензодатчиков

Для цитирования: Семенова И.Э., Амосов П.В., Кузнецов Н.Н., Некрасов В.А. Совершенствование алгоритма для расчета напряженно-деформированного состояния массива пород при измерении деформаций методом разгрузки напряжений на торце скважины. *Горная промышленность*. 2025;(5):84–90. https://doi.org/10.30686/1609-9192-2025-5-84-90

Improvement of the algorithm for calculating the stress-strain state of a rock mass when measuring strains using the stress relief method at the borehole bottom

I.E. Semenova[1], P.V. Amosov[2], N.N. Kuznetcov[1]✉, V.A. Nekrasov[1]
[1] Mining Institute, Kola Science Centre of the Russian Academy of Sciences, Apatity, Russian Federation
[2] Institute of North Industrial Ecology Problems, Kola Science Centre of the Russian Academy of Sciences, Apatity, Russian Federation
✉ n.kuznecov@ksc.ru

Abstract: The paper is a continuation of the research on calculating parameters of the stress-strain state of the rock mass based on in-situ measurements. An algorithm is described that allows combining the approaches of the Mining Institute of the Kola Science Centre of the RAS and those of E.R. Leeman to calculate the stresses acting in the rock mass and determined on the basis of data obtained by the stress relief method when measured at the borehole bottom. The mathematical apparatus for calculating the components of the stress tensor in the plane of the bottom-hole surface of three mutually perpendicular boreholes is given when the choice of directions of two of them coincides with the directions of the main stresses at the bottom of the third borehole. The situation of using a four-gauge rosette is analyzed for layouts with the angles of 0, 60, 120 and 90°.

Two possible algorithms for the calculation of the normal stress components are presented, as well as the results of calculations based on the experimental data obtained during the measurements of the stress-strain state in a rock mass of the Zhdanovskoye deposit.
A comparative analysis of the obtained predicted values of the maximum and minimum stresses by the criterion of deviation by ±10% from the mean was carried out. Application of the least squares method gives the values of the maximum and minimum stresses close to the results of the enumeration of 16 possibilities.

Keywords: stress-strain state, rock mass, doorstopper method, borehole, strain-gauge rosette

For citation: Semenova I.E., Amosov P.V., Kuznetcov N.N., Nekrasov V.A. Improvement of the algorithm for calculating the stress-strain state of a rock mass when measuring strains using the stress relief method at the borehole bottom. *Russian Mining Industry*. 2025;(5):84–90. (In Russ.) https://doi.org/10.30686/1609-9192-2025-5-84-90

Введение

Оценка типа и параметров напряженно-деформированного состояния массива горных пород является необходимой при проектировании выемки запасов полезных ископаемых [1–4]. Дефицит информации о НДС может приводить как к необоснованному выбору системы разработки и ее параметров, так и к недостаточной проработке вопросов безопасности горных работ. Одним из методов натурных исследований НДС остается на протяжении нескольких десятилетий метод полной разгрузки [5–10]. В публикации [9] авторы, во многом опираясь на работы E.R. Leeman [11], А. Кобаяси [12] и ряд учебно-методических пособий [13–17], представили результаты своих исследований в части разработки математического аппарата для расчета напряжений, действующих в массиве пород и определяемых на основании метода разгрузки в варианте торцевых измерений. В частности, предложен подход для расчета компонент тензора напряжений в плоскости забоя трех взаимно перпендикулярных скважин (рис. 1, *а*) через величины деформаций четырехдатчиковой розетки для схемы размещения тензодатчиков [9] с углами равными $\beta_A = 0°$, $\beta_B = 45°$, $\beta_C = 90°$, и $\beta_D = 135°$.

Этот подход включает в себя алгоритм и математические формулы, используемые для перехода от направлений и величин напряжений на плоскости замеров к направлению и величинам главных напряжений в массиве.

Одновременно существует методика Горного института КНЦ РАН [18; 19] для решения аналогичной задачи. Особенность методики заключается в выборе направления скважин 1 и *2* вдоль действия главных напряжений σ_1 и σ_2 на торце скважины *3* (рис. 1, *б*). При этом и переход к напряжениям во вмещающем массиве выполняется по оригинальному алгоритму [18; 19], отличающемуся от алгоритма E.R. Leeman [11].

Назовем подход E.R. Leeman [11] «строгая ортогональность скважин», а подход ГоИ КНЦ РАН [18; 19] «квазиортогональность скважин», что обусловлено указанной выше особенностью.

Цель настоящей работы заключается в том, чтобы с использованием наработок подхода «квазиортогональности скважин» в части измерений на торцах всех трех скважин [18; 19] перейти к вычислениям напряжений во вмещающем массиве по алгоритму E.R. Leeman [11], т.е. подходу «строгой ортогональности скважин». Применение такого алгоритма позволит обойтись без дополнительных поправочных параметров, значения которых имеют разброс до 30% [9].

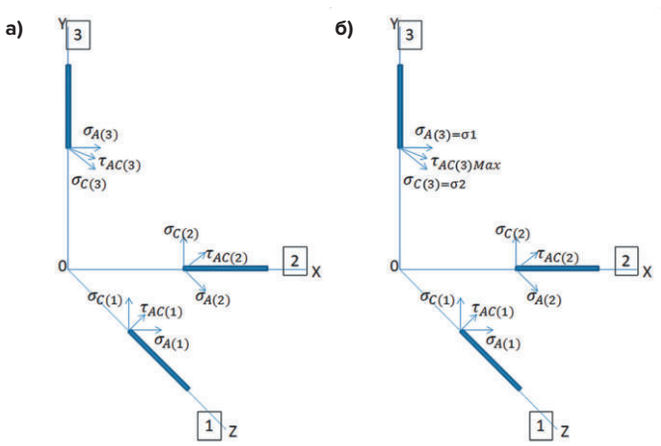

Рис. 1. Компоненты нормальных и касательных напряжений по результатам замеров в трех взаимно ортогональных друг другу скважинах (1, 2, 3 – номер забоя скважин):
а – схема по E.R. Leeman [11];
б – схема по E.R. Leeman [11], видоизмененная в соответствии с методикой Горного института [18; 19] в части выбора направлений скважин 1 и 2 посредством поворота вдоль главных напряжений σ_1 и σ_2 на торце скважины 3

Fig. 1. Components of normal and tangential stresses based on the results of measurements in three mutually orthogonal boreholes (1, 2, 3 – number of borehole bottom):
a – layout by E.R. Leeman [11];
б – layout by E.R. Leeman [11], modified according to the methodology of the Mining Institute [18; 19] in terms of selecting the directions of Boreholes 1 and 2 by rotating along the main stresses σ_1 and σ_2 at the bottom of Borehole 3

Расчет напряжений на торце скважин

Методика ГоИ КНЦ РАН предполагает использование четырехэлементной прямоугольной розетки с датчиками [9], расположенными под углами $\beta_A = 0°$, $\beta_B = 60°$, $\beta_C = 120°$ и $\beta_D = 90°$, т.е. углу *A* соответствует направление 1, углу *B* направление *2*, углу *C* направление *3* и углу *D* направление 4.

Соответствующие данным углам значения косинусов и синусов:

$$\cos\beta_A = 1,\ \sin\beta_A = 0,\ \cos\beta_B = {}^1/_2,\ \sin\beta_B = {}^{\sqrt{3}}/_2,$$
$$\cos\beta_D = 0,\ \sin\beta_D = 1,\ \cos\beta_C = -{}^1/_2,\ \sin\beta_C = {}^{\sqrt{3}}/_2.$$

На основании измеренных в ходе разгрузки значений деформаций выполняется переход к напряжениям на забое скважины (плоское напряженное состояние) с использованием формул теории упругости [12–17].

Система уравнений преобразования деформаций при повороте осей координат в нашем случае имеет вид:

$$\varepsilon_{xx}\cdot 1+\varepsilon_{yy}\cdot 0+\gamma_{xy}\cdot 0=\varepsilon_A,$$
$$\varepsilon_{xx}\cdot \frac{1}{4}+\varepsilon_{yy}\cdot \frac{3}{4}+\gamma_{xy}\cdot \frac{\sqrt{3}}{4}=\varepsilon_B,$$
$$\varepsilon_{xx}\cdot 0+\varepsilon_{yy}\cdot 1+\gamma_{xy}\cdot 0=\varepsilon_D,$$
$$\varepsilon_{xx}\cdot \frac{1}{4}+\varepsilon_{yy}\cdot \frac{3}{4}-\gamma_{xy}\cdot \frac{\sqrt{3}}{4}=\varepsilon_C.$$

Из первых трех уравнений имеем:

$$\varepsilon_{xx}=\varepsilon_A,\ \ \varepsilon_{yy}=\varepsilon_D,$$
$$\sqrt{3}\gamma_{xy}=4\varepsilon_B-\varepsilon_A-3\varepsilon_D=4\varepsilon_B-(\varepsilon_A+3\varepsilon_D).$$

Если сложить 2-е и 4-е уравнения, то с учетом приведенных решений $2\varepsilon_A+6\varepsilon_D=4\varepsilon_B+4\varepsilon_C$ или $\varepsilon_A+3\varepsilon_D=2\varepsilon_B+2\varepsilon_C$, т.е. 3-ю компоненту деформаций можно записать в форме $\gamma_{xy}=\frac{1}{\sqrt{3}}(4\varepsilon_B-2\varepsilon_B-2\varepsilon_C)=\frac{2}{\sqrt{3}}(\varepsilon_B-\varepsilon_C)$. Таким образом, задействованы все 4 измеряемые деформации.

По известным компонентам тензора деформаций главные деформации ε_1 и ε_2, а также их направления на забое скважины:

$$\varepsilon_1=\frac{1}{2}(\varepsilon_A+\varepsilon_D)+\frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_A-\varepsilon_D)^2+\frac{4}{3}(\varepsilon_B-\varepsilon_C)^2},$$
$$\varepsilon_2=\frac{1}{2}(\varepsilon_A+\varepsilon_D)-\frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_A-\varepsilon_D)^2+\frac{4}{3}(\varepsilon_B-\varepsilon_C)^2},$$
$$2\beta_1=\operatorname{arctg}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\varepsilon_B-\varepsilon_C}{\varepsilon_A-\varepsilon_D}\right],$$

где β_1 – угол наклона деформации ε_1 к оси *x*. В отношении угла β_1 А. Кобаяси [12] обращает внимание, что на самом деле имеем два значения. Одно значение дает угол β_1 между ε_1 и осью *x*, а другое – угол β_2 между ε_2 и осью *x*.

Следуя рекомендациям E.R. Leeman [11], введем необходимое в дальнейшем обозначение:

$$\sqrt{X}\equiv\sqrt{(\varepsilon_A-\varepsilon_D)^2+\frac{4}{3}(\varepsilon_B-\varepsilon_C)^2}.$$

По известным главным деформациям ε_1 и ε_2 записываем главные напряжения σ_1 и σ_2 и максимальное тангенциальное напряжение τ_{max} на торце скважины. Далее выражаем σ_1, σ_2, τ_{max} через измеренные деформации:

$$\sigma_1=\frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_1+\mu\varepsilon_2);\ \sigma_2=\frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_2+\mu\varepsilon_1);$$
$$\tau_{\max}=\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_2).$$

Следует обратить внимание, что в подходе «квазиортогональности скважин» для вертикальной оси *Y* будут использоваться именно эти величины:

$$\sigma_1=E\left[\frac{\varepsilon_A+\varepsilon_D}{2(1-\mu)}+\frac{\sqrt{X}}{2(1+\mu)}\right],$$
$$\sigma_2=E\left[\frac{\varepsilon_A+\varepsilon_D}{2(1-\mu)}-\frac{\sqrt{X}}{2(1+\mu)}\right],$$
$$\tau_{\max}=\frac{E}{2(1+\mu)}\sqrt{X}.$$

В подходе «строгой ортогональности скважин» по известным главным напряжениям записывают и далее используют компоненты напряжений по выбранным направлениям *X* и *Y*:

$$\sigma_A=\frac{1}{2}[\sigma_1+\sigma_2]+\frac{1}{2}[\sigma_1-\sigma_2]\cos(2\beta_1),$$
$$\sigma_C=\frac{1}{2}[\sigma_1+\sigma_2]-\frac{1}{2}[\sigma_1-\sigma_2]\cos(2\beta_1),$$
$$\tau_{AC}=\frac{1}{2}[\sigma_1-\sigma_2]\sin(2\beta_1).$$

Выразим результат через измеренные деформации:

$$\sigma_A=\frac{E}{2}\left[\frac{\varepsilon_A+\varepsilon_D}{1-\mu}+\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\varepsilon_A-\varepsilon_D}{1+\mu}\right],$$
$$\sigma_C=\frac{E}{2}\left[\frac{\varepsilon_A+\varepsilon_D}{1-\mu}-\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\varepsilon_A-\varepsilon_D}{1+\mu}\right],$$
$$\tau_{AC}=\frac{E}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\varepsilon_B-\varepsilon_C}{1+\mu}.$$

Таким образом, компоненты тензора напряжений в плоскости поверхности забоя скважин (1 и 2) через величины деформаций, полученные по четырем датчикам, определяются по следующим формулам:

– для скважины №1 (ось скважины совпадает с осью *Z*, см. рис. 1, *а*):

$$\sigma_{A1}=\frac{E}{2}\left[\frac{\varepsilon_{A1}+\varepsilon_{D1}}{1-\mu}+\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\varepsilon_{A1}-\varepsilon_{D1}}{1+\mu}\right],$$
$$\sigma_{C1}=\frac{E}{2}\left[\frac{\varepsilon_{A1}+\varepsilon_{D1}}{1-\mu}-\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\varepsilon_{A1}-\varepsilon_{D1}}{1+\mu}\right],$$
$$\tau_{AC1}=\frac{E}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\varepsilon_{B1}-\varepsilon_{C1}}{1+\mu};$$

– для скважины №2 (ось скважины совпадает с осью *X*, см. рис. 1, *а*):

$$\sigma_{A2}=\frac{E}{2}\left[\frac{\varepsilon_{A2}+\varepsilon_{D2}}{1-\mu}+\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\varepsilon_{A2}-\varepsilon_{D2}}{1+\mu}\right],$$
$$\sigma_{C2}=\frac{E}{2}\left[\frac{\varepsilon_{A2}+\varepsilon_{D2}}{1-\mu}-\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\varepsilon_{A2}-\varepsilon_{D2}}{1+\mu}\right],$$
$$\tau_{AC2}=\frac{E}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\varepsilon_{B2}-\varepsilon_{C2}}{1+\mu};$$

– для скважины №3 (ось скважины совпадает с осью *Y*, см. рис. 1, *а*) в подходе «строгой ортогональности скважин» имеем:

$$\sigma_{A3}=\frac{E}{2}\left[\frac{\varepsilon_{A3}+\varepsilon_{D3}}{1-\mu}+\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\varepsilon_{A3}-\varepsilon_{D3}}{1+\mu}\right],$$
$$\sigma_{C3}=\frac{E}{2}\left[\frac{\varepsilon_{A3}+\varepsilon_{D3}}{1-\mu}-\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\varepsilon_{A3}-\varepsilon_{D3}}{1+\mu}\right],$$
$$\tau_{AC3}=\frac{E}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\varepsilon_{B3}-\varepsilon_{C3}}{1+\mu}.$$

В подходе «квазиортогональности скважин», как указывалось выше, используем значения главных напряжений σ_1 и σ_2 и максимальное тангенциальное τ_{max} на торце скважины (см. рис. 1, *б*)

$$\sigma_{A3}=\sigma_1,$$
$$\sigma_{C3}=\sigma_2,$$
$$\tau_{AC3}=\tau_{\max}.$$

В правых частях уравнений фигурируют относительные деформации, полученные по соответствующему датчику деформаций, а для скважины №3 (ось скважины совпадает с осью *Y*) из первоначального эксперимента и обработки информации по этой (вертикальной) скважине.

Применение алгоритма E.R. Leeman для расчета напряжений в массиве

На шаге нахождения значений напряжений в массиве и углов наклона площадок главных напряжений, выраженных через направляющие косинусы, воспользуемся алгоритмом E.R. Leeman [11].

Запишем следующую систему уравнений, используя правило: 1-я скважина последовательность *XYZ*; 2-я скважина последовательность *YZX* и 3-я скважина последовательность *ZXY*. Присвоим всем уравнениям номера:

$$a\sigma_x + b\sigma_y + c\sigma_z = \sigma_{A1}; \quad (1)$$
$$b\sigma_x + a\sigma_y + c\sigma_z = \sigma_{C1}; \quad (2)$$
$$c\sigma_x + a\sigma_y + b\sigma_z = \sigma_{C2}; \quad (3)$$
$$c\sigma_x + b\sigma_y + a\sigma_z = \sigma_{A2}; \quad (4)$$
$$b\sigma_x + c\sigma_y + a\sigma_z = \sigma_{C3}; \quad (5)$$
$$a\sigma_x + c\sigma_y + b\sigma_z = \sigma_{A3}. \quad (6)$$

Путь 1. Рассмотрим классический подход, когда из представленной системы уравнений (1)–(6) выбираются 3 уравнения под 3 неизвестные нормальные компоненты напряжений σ_x, σ_y и σ_z.

Из шести уравнений по трем можно составить 16 комбинаций.

Во-первых, возможны 8 комбинаций, когда для создания системы уравнений задействованы только две скважины: I – 123; II – 124; III – 125; IV – 126; V – 134; VI – 234; VII – 345; VIII – 346.

Например, для комбинации 124 система необходимых определителей для вычисления нормальных компонент напряжений σ_x, σ_y и σ_z в породном массиве, составленная, например, из уравнений для скважин №1 – №2, имеет вид:

$$\Delta = \begin{Vmatrix} a & b & c \\ b & a & c \\ c & b & a \end{Vmatrix} = a^3 + b^2c + bc^2 - abc - ac^2 - ab^2,$$

$$\Delta\sigma_x = \begin{Vmatrix} \sigma_{A1} & b & c \\ \sigma_{C1} & a & c \\ \sigma_{A2} & b & a \end{Vmatrix} = \sigma_{A1}a^2 + \sigma_{A2}bc + \sigma_{C1}bc - ac\sigma_{A2} - \sigma_{A1}bc - ab\sigma_{C1},$$

$$\Delta\sigma_y = \begin{Vmatrix} a & \sigma_{A1} & c \\ b & \sigma_{C1} & c \\ c & \sigma_{A2} & a \end{Vmatrix} = \sigma_{C1}a^2 + \sigma_{A1}c^2 + \sigma_{A2}bc - \sigma_{C1}c^2 - \sigma_{A2}ac - \sigma_{A1}ab,$$

$$\Delta\sigma_z = \begin{Vmatrix} a & b & \sigma_{A1} \\ b & a & \sigma_{C1} \\ c & b & \sigma_{A2} \end{Vmatrix} = \sigma_{A2}a^2 + \sigma_{A1}b^2 + \sigma_{C1}bc - \sigma_{A1}ac - \sigma_{C1}ab - \sigma_{A2}b^2.$$

Во-вторых, возможны 8 комбинаций, когда одновременно задействованы по одному уравнению для каждой скважины: I – 135; II – 136; III – 145; IV – 146; V – 235; VI – 236; VII – 245; VIII – 246.

Например, для комбинации 135 система необходимых определителей для вычисления нормальных компонент напряжений σ_x, σ_y и σ_z в породном массиве, составленная, например, из уравнений для скважин №1–№2–№3, имеет вид:

$$\Delta = \begin{Vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{Vmatrix} = a^3 + b^3 + c^3 - abc - abc - abc,$$

$$\Delta\sigma_x = \begin{Vmatrix} \sigma_{A1} & b & c \\ \sigma_{C2} & a & b \\ \sigma_{C3} & c & a \end{Vmatrix} = \sigma_{A1}a^2 + \sigma_{C3}b^2 + \sigma_{C2}c^2 - ac\sigma_{C3} - \sigma_{A1}bc - ab\sigma_{C2},$$

$$\Delta\sigma_y = \begin{Vmatrix} a & \sigma_{A1} & c \\ c & \sigma_{C2} & b \\ b & \sigma_{C3} & a \end{Vmatrix} = \sigma_{C2}a^2 + \sigma_{A1}b^2 + \sigma_{C3}c^2 - \sigma_{C2}bc - \sigma_{A1}ac - \sigma_{C3}ab,$$

$$\Delta\sigma_z = \begin{Vmatrix} a & b & \sigma_{A1} \\ c & a & \sigma_{C2} \\ b & c & \sigma_{C3} \end{Vmatrix} = \sigma_{C3}a^2 + \sigma_{C2}b^2 + \sigma_{A1}c^2 - \sigma_{A1}ab - \sigma_{C3}bc - \sigma_{C2}ac.$$

Во всех 16 комбинациях после вычисления определителей последовательно рассчитываем нормальные и касательные компоненты напряжений в массиве:

$$\sigma_x = \frac{\Delta\sigma_x}{\Delta}; \ \sigma_y = \frac{\Delta\sigma_y}{\Delta}; \ \sigma_z = \frac{\Delta\sigma_z}{\Delta}; \ \tau_{xy} = \frac{\tau_{AC1}}{d}; \ \tau_{yz} = \frac{\tau_{AC2}}{d}; \ \tau_{zx} = \frac{\tau_{AC3}}{d}.$$

Запишем тензор компонент напряжений:

$$\sigma_{ij} = \begin{Vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{Vmatrix}.$$

Строго говоря, наличие 16 комбинаций заставляет либо искать какой-то «однозначный» **(Путь 2)** выход из положения, либо выполнить анализ результатов расчетов всех 16 комбинаций, чтобы отсеять «нефизичные» решения, т.к. формально мы имеем переопределенную систему линейных алгебраических уравнений.

Путь 2. Для решения системы линейных алгебраических уравнений (1)–(6), состоящей из шести уравнений и содержащей три неизвестные, используем метод наименьших квадратов [20; 21]. Расчеты можно выполнить с использованием верифицированного программного обеспечения (например, компилятора MS Fortran Power Station 4.0 или др.).

Тестирование подхода «квазиортогональности скважин»

Исходные данные для поверочного расчета взяты по одной из замерных станций на Ждановском месторождении: модуль упругости равен 87,0 ГПа и коэффициент Пуассона равен 0,22, относительные деформации в скважинах по датчикам приведены в табл. 1.

Таблица 1
Относительные деформации в скважинах по датчикам

Table 1
Relative strains in boreholes by the strain gauges

Датчики	Скважина 1	Скважина 2	Скважина 3
A	0,0000175	–0,0004700	–0,0001171
B	0,0000038	–0,0003356	–0,0000686
C	–0,0002225	–0,0001111	–0,0005100
D	–0,0000438	–0,0000789	–0,0003571

Для выполнения расчетов по **Пути 1** и **Пути 2** использованы программы, созданные в компиляторе MS Fortran Power Station 4.0. Результаты поверочных расчетов всех 16 комбинаций **Пути 1** для минимальных и максимальных напряжений приведены в табл. 2. На данном этапе иссле-

Таблица 2
Значения минимальных и максимальных напряжений (Путь 1)

Table 2
Minimum and maximum stress values (Path 1)

Использованы две скважины			Использованы три скважины		
Комбинация	σ_{min}, МПа	σ_{max}, МПа	Комбинация	σ_{min}, МПа	σ_{max}, МПа
123	–8,5	–51,1	***135***	***–12,6***	***–57,6***
124	***–12,5***	***–57,3***	136	–6,5	–48,2
125	***–13,4***	***–58,6***	***145***	***–11,7***	***–56,5***
126	–5,6	–46,9	146	–13,9	–58,9
134	***–12,2***	***–56,9***	235	–17,6	–60,3
234	–18,6	–61,3	236	–7,1	–49,7
345	***–15,2***	***–59,0***	***245***	***–16,3***	***–59,7***
346	–8,7	–54,7	***246***	***–10,0***	***–55,7***

Примечание: для дальнейшего анализа значения максимальных и минимальных напряжений берутся по модулю, а знак «–» указывает на то, что действуют сжимающие напряжения.
Note: for the purpose of further analysis, the maximum and minimum stresses are taken by modulus, and the "–" sign indicates that compressive stresses are present.

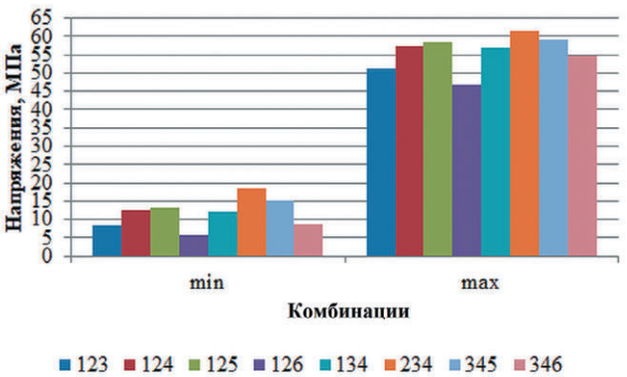

Рис. 2
Диаграмма модулей минимальных и максимальных значений напряжений при использовании данных по двум скважинам

Fig. 2
A bar chart featuring the moduli of the minimum and maximum stress values using data from two boreholes

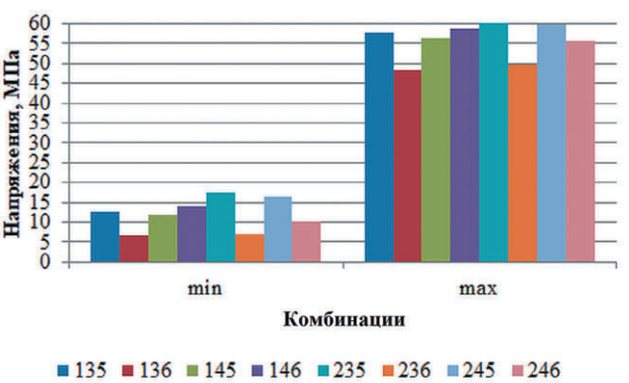

Рис. 3
Диаграмма модулей минимальных и максимальных значений напряжений при использовании данных по трем скважинам

Fig. 3
A bar chart featuring the moduli of the minimum and maximum stress values using data from three boreholes

дований акцентируем внимание только на напряжениях.

На рис. 2 и 3 приведены графические изображения модулей минимальных и максимальных напряжений в форме диаграмм при использовании данных по двум и трем скважинам соответственно. Данные табл. 2, рис. 2 и 3 свидетельствуют, что прогнозные значения напряжений имеют определенный разброс.

Обратимся к средним расчетным значениям. В принципе, здесь возможны два способа:

1) осреднение по всем 16 комбинациям;

2) осреднение по 8 комбинациям, которые в табл. 2 выделены полужирным шрифтом.

Первый способ является достаточно понятным, тогда как второй требует определенных разъяснений. Дело в том, что в комбинациях, которые в табл. 2 не выделены полужирным шрифтом, в правых частях системы трех уравнений в двух из них при рассмотрении **элементарного** кубика, т.е. переходе к бесконечно малым масштабам, появляются компланарные векторы, равные по модулю. Например, для комбинации 123 это будут $\sigma_{C(1)}$ и $\sigma_{C(2)}$ (см. рис. 1, *а*).

В табл. 3 представлены осредненные по описанным способам Пути 1 расчетные значения минимальных и максимальных напряжений.

Таблица 3
Осредненные расчетные значения минимальных и максимальных напряжений (Путь 1)

Table 3
Averaged calculated values of the minimum and maximum stresses (Path 1)

Способы	**σ_{min}, МПа**	**σ_{max}, МПа**
Способ 1		
по 8 комбинациям для двух скважин	–11,8	–55,7
по 8 комбинациям для трех скважин	–12,0	–55,8
по всем 16 комбинациям	–11,9	–55,8
Способ 2	–13,0	–57,7

Попробуем найти комбинацию скважин, для которых выполняется условие отклонения от среднего значения примерно на ±10%, что соответствует требованиям точности расчетов в горном деле, достаточной при исследовании свойств и состояния массива пород [22]. В случае напряжений это составит для их максимальных значений примерно ±5 МПа, а для их минимальных значений примерно ±1 МПа.

В подходе способа 1 **Пути 1** для максимальных и минимальных напряжений имеем:

– по двум скважинам: 124, 134 (минимальные) и 123, 124, 125, 134, 345, 346 (максимальные) (**две общих комбинации: 124, 134**);

– по трем скважинам: 135, 145 (минимальные) и 135, 145, 146, 235, 236, 246 (максимальные) (**две общих комбинации: 135, 145**).

Таким образом, из анализа минимальных и максимальных напряжений по двум и трем скважинам способа 1 **Пути 1** имеем следующие прогнозные значения:

– комбинация 124: –12,5 МПа и –57,3 МПа; комбинация 134: –12,2 МПа и –56,9 МПа;

– комбинация 135: –12,6 МПа и –57,6 МПа; комбинация 145: –11,7 МПа и –56,5 МПа.

Аналогичный анализ минимальных и максимальных напряжений на базе способа 2 **Пути 1** дает следующие прогнозные значения:

– комбинация 124: –12,5 МПа и –57,3 МПа; комбинация 125: –13,4 МПа и –58,6 МПа;

– комбинация 134: –12,2 МПа и –56,9 МПа; комбинация 135: –12,6 МПа и –57,6 МПа.

Обобщая оба способа **Пути 1**, можно рекомендовать для вычислений минимальных и максимальных напряжений использовать комбинации 124, 134 и 135.

В результате численного решения системы уравнений (1)–(6) по **Пути 2** получим искомые компоненты напряжений: минимальное –11,3 МПа и максимальное –5 6,6 МПа.

Видно, что результаты, полученные с использованием метода наименьших квадратов (**Путь 2**), находятся в хорошем, по крайней мере, инженерном, согласии (±10%) с результатами осреднения по классическому пути решения проблемы на базе способа 1, что вполне достаточно при исследовании свойств и состояния массива пород.

Заключение

Представлены алгоритм и математический аппарат, позволяющие объединить подход Горного института КНЦ РАН «квазиортогональности скважин» и подход

E.R. Leeman «строгая ортогональность скважин», для расчета напряжений, действующих в массиве пород и определяемых на основании метода разгрузки в варианте торцевых измерений.

Предложен математический аппарат для расчета компонент тензора напряжений в плоскости поверхности забоя трех взаимно перпендикулярных скважин, когда выбор направлений двух из них совпадает с направлениями главных напряжений на торце забоя третьей скважины. Алгоритм приведен через величины деформаций четырехдатчиковой розетки для схемы размещения тензодатчиков с углами $\beta_A = 0°$, $\beta_B = 60°$, $\beta_C = 120°$ и $\beta_D = 90°$.

Описан подход, который включает в себя математические формулы и алгоритм перехода от направлений и величин напряжений на плоскости замеров к направлению и величине главных напряжений в массиве.

Для вычисления нормальных компонент напряжений σ_x, σ_y и σ_z представлены два из возможных алгоритмов расчета напряжений и углов наклона площадок в массиве: **Путь 1** – классический, когда посредством перебора рассматриваются 16 комбинаций: три уравнения и три неизвестных (обсуждаются два способа выбора системы уравнений); **Путь 2** – использование метода наименьших квадратов ко всем шести уравнениям с тремя неизвестными.

Представлены результаты поверочных расчетов на основе набора экспериментальных данных, полученных при проведении разгрузки в массиве пород Ждановского месторождения.

Выполнен сравнительный анализ полученных прогнозных значений максимальных и минимальных напряжений по критерию отклонения на ±10% от среднего для обоих способов **Пути 1**. Отмечены хорошие совпадения результатов трех комбинаций по минимальным и максимальным напряжениям.

Показана хорошая сходимость значений максимальных и минимальных напряжений, полученных методом наименьших квадратов (**Путь 2**), с результатами при использовании классического подхода.

Список литературы / References

1. Козырев А.А., Панин В.И., Семенова И.Э. Опыт применения экспертных систем оценки напряженно-деформированного состояния массива горных пород для выбора безопасных способов отработки рудных месторождений. *Записки Горного института*. 2012;198:16–23. Режим доступа: https://pmi.spmi.ru/pmi/article/view/5908 (дата обращения: 27.04.2025).
   Kozyrev A.A., Panin V.I., Semenova I.E. Experience in expert systems application for estimation of stress- strain state of rock mass for selection of safe methods of ore deposits mining. *Journal of Mining Institute*. 2012;198:16–23. (In Russ.) Available at: https://pmi.spmi.ru/pmi/article/view/5908 (accessed: 27.04.2025).
2. Криницын Р.В. Напряженно-деформированное состояние массива горных пород при отработке месторождений Урала. *Горная промышленность*. 2022;(5):79–82. https://doi.org/10.30686/1609-9192-2022-5-79-82
   Krinitsyn R.V. Stress-and-strain state of the rock mass in mining deposits in the Urals. *Russian Mining Industry*. 2022;(5):79–82. (In Russ.) https://doi.org/10.30686/1609-9192-2022-5-79-82
3. Adah E.I., Amah E.A. Modified horizontal stress equations for rock mass insitu stress state. *Nnamdi Azikiwe University Journal of Civil Engineering (NAUJCVE)*. 2024;2(3):11–14. Available at: https://naujcve.com/index.php/NAUJCVE/article/view/134/139 (accessed: 20.06.2025).
4. Demin V., Kalinin A., Tomilova N., Tomilov A., Akpanbayeva A., Shokarev D., Popov A. Advanced digital modeling of stress-strain behavior in rock masses to ensure stability of underground mine workings. *Civil Engineering Journal*. 2025;11(3):1072–1087. https://doi.org/10.28991/CEJ-2025-011-03-014
5. Christiansson R., Janson T. A test of different stress measurement methods in two orthogonal bore holes in Äspö Hard Rock Laboratory (HRL), Sweden. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*. 2003;40(7-8):1161–1172. https://doi.org/10.1016/j.ijrmms.2003.07.006
6. Yaméogo S.T., Corthésy R., Leite M.H. Influence of local heterogeneity on Doorstopper stress measurements. International *Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*. 2013;60:288–300. https://doi.org/10.1016/j.ijrmms.2013.01.001
7. Guido S., Acerbis R., Sossi G. Practice of the Doorstopper stress measurement method during the last 30 years in Italy. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*. 2021;833:012167. https://doi.org/10.1088/1755-1315/833/1/012167
8. Feng Y., Pan P.-Z., Wang Z., Liu X., Miao S. A novel indirect optical method for rock stress measurement using micro-deformation field analysis. *Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering*. 2024;16(9):3616–3628 https://doi.org/10.1016/j.jrmge.2023.10.011
9. Семенова И.Э., Амосов П.В., Кузнецов Н.Н., Некрасов В.А. Развитие подходов к расчету параметров напряженно-деформированного состояния массива пород по результатам измерений деформаций на торце скважины. *Горная промышленность*. 2024;(5S):122–129. https://doi.org/10.30686/1609-9192-2024-5S-122-129
   Semenova I.E., Amosov P.V., Kuznetcov N.N., Nekrasov V.A. Development of approaches to calculation of the stress-strain state parameters of the rock mass based on the results of deformation measurements at the borehole bottom. *Russian Mining Industry*. 2024;(5S):122–129. (In Russ.) https://doi.org/10.30686/1609-9192-2024-5S-122-129

10. Ali Z., Karakus M., Nguyen G.D., Amrouch K. Secant modulus method: A simplified technique for measuring in situ stresses in rocks. *Rock Mechanics and Rock Engineering*. 2025;58(4):4263–4279. https://doi.org/10.1007/s00603-024-03953-z
11. Leeman E.R. The CSIR "doorstopper" and triaxial rock stress measuring instruments. *Rock Mechanics*. 1971;3(1):25–50. https://doi.org/10.1007/BF01243550
12. Кобаяси А. (ред.) *Экспериментальная механика* [пер. с англ. под ред. Б.Н. Ушакова]. М.: Мир; 1990. Кн. 1. 615 с. :
13. Мехеда В.А. *Тензометрический метод измерения деформаций*. Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та; 2011. 56 с.
14. Деменчук Н.П., Прилуцкий А.А. *Основы теории напряженного и деформированного состояния*. СПб.: Университет ИТМО; 2016. 118 с.
15. Реут Л.Е. *Теория напряженного и деформированного состояния с примерами и задачами*. Минск: БИТУ; 2008. 107 с.
16. Водопьянов В.И., Савкин А.Н., Кондратьев О.В. *Курс сопротивления материалов с примерами и задачами*. Волгоград: ВолгГТУ; 2012. 136 с.
17. Иофис М.А., Макаров А.Б., Каспарьян Э.В., Козырев А.А. *Геомеханика и охрана объектов поверхности*. М.: Высш. шк.; 2006. 503 с.
18. Турчанинов И.А., Иванов В.И., Марков Г.А. (сост.) *Руководство по измерению напряжений в массиве скальных пород методом разгрузки: вариант торцевых измерений*. Апатиты; 1970. 48 с.
19. Турчанинов И.А., Марков Г.А., Панин В.И., Иванов В.И. (сост.) *Экспериментальное определение полного тензора напряжений в массиве горных пород*. Апатиты; 1973. 37 с.
20. Мудров В.И., Кушко В.Л. *Методы обработки измерений*. М.: Сов. радио; 1976. 192 с.
21. Лоусон Ч., Хенсон Р. *Численное решение задач метода наименьших квадратов* [пер. с англ. Х.Д. Икрамова]. М.: Наука; 1986. 230 с.
22. Барон Л.И., Логунцов Б.М., Позин Е.З. *Определение свойств горных пород*. М.: Госгортехиздат; 1962. 332 с.

Информация об авторах
Семенова Инна Эриковна – кандидат технических наук, руководитель отдела геомеханики, Горный институт Кольского научного центра Российской академии наук, г. Апатиты, Российская Федерация; https://orcid.org/0000-0003-4074-7240; e-mail: i.semenova@ksc.ru
Амосов Павел Васильевич – кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории междисциплинарных эколого-экономических исследований, Институт проблем промышленной экологии Севера Кольского научного центра Российской академии наук, г. Апатиты, Российская Федерация; https://orcid.org/0000-0002-7725-6261; e-mail: p.amosov@ksc.ru
Кузнецов Николай Николаевич – кандидат технических наук, руководитель лаборатории инструментальных исследований состояния горных пород Арктической зоны РФ, отдел геомеханики, Горный институт Кольского научного центра Российской академии наук, г. Апатиты, Российская Федерация; https://orcid.org/0000-0002-0624-4351; e-mail: n.kuznecov@ksc.ru
Некрасов Валерий Аркадьевич – ведущий инженер лаборатории инструментальных исследований состояния горных пород Арктической зоны РФ, отдел геомеханики, Горный институт Кольского научного центра Российской академии наук, г. Апатиты, Российская Федерация; e-mail: v.nekrasov@ksc.ru

Информация о статье
Поступила в редакцию: 11.05.2025
Поступила после рецензирования: 09.07.2025
Принята к публикации: 14.07.2025

Information about the authors
Inna E. Semenova – Cand. Sci. (Eng.), Head of Department of Rock Mechanics, Mining Institute, Kola Science Centre of the Russian Academy of Sciences, Apatity, Russian Federation; https://orcid.org/0000-0003-4074-7240; e-mail: i.semenova@ksc.ru
Pavel V. Amosov – Cand. Sci. (Eng.), Leading researcher of the Laboratory of Interdisciplinary Ecological and Economic Research, Institute of North Industrial Ecology Problems, Kola Science Centre of the Russian Academy of Sciences, Apatity, Russian Federation; https://orcid.org/0000-0002-7725-6261; e-mail: p.amosov@ksc.ru
Nikolai N. Kuznetcov – Cand. Sci. (Eng.), Head of the Laboratory of Instrumental Study of Rock's State of the Russian Arctic Region, Department of Rock Mechanics, Mining Institute, Kola Science Centre of the Russian Academy of Sciences, Apatity, Russian Federation; https://orcid.org/0000-0002-0624-4351; e-mail: n.kuznecov@ksc.ru
Valery A. Nekrasov – Leading Engineer of the Laboratory of Instrumental Study of Rock's State of the Russian Arctic Region, Department of Rock Mechanics, Mining Institute, Kola Science Centre of the Russian Academy of Sciences, Apatity, Russian Federation; e-mail: v.nekrasov@ksc.ru

Article info
Received: 11.05.2025
Revised: 09.07.2025
Accepted: 14.07.2025