

# Математическое моделирование устойчивости предохранительных целиков в слоистых породах при подземной разработке месторождений

Д.Ж. Акматов<sup>1,2</sup> ✉, Р.В. Шевчук<sup>1,2,3</sup>, А.А. Зарубин<sup>1,2</sup>, Д.Д. Вейс<sup>1,2</sup>, М.В. Подлозная<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Геофизический центр Российской академии наук, г. Москва, Российская Федерация

<sup>2</sup> Национальный исследовательский технологический университет «МИСИС», г. Москва, Российская Федерация

<sup>3</sup> Институт физики Земли имени О.Ю. Шмидта Российской академии наук, г. Москва, Российская Федерация

✉ d.akmatov@gcras.ru

**Резюме:** Для определения устойчивой формы целика в слоистых породах разработан комплекс математических моделей, каждая из которых соответствует отдельному слою массива. Устойчивая форма всего целика формируется путём объединения устойчивых форм отдельных слоёв. В частности, предполагается, что целик обладает слоистым строением и круглым поперечным сечением, на которое действует внешнее поле напряжений. Величина действующего напряжения определяется в том числе длиной трещин в верхнем слое массива. Устойчивость целика достигается при обеспечении равномерного макроскопического распределения напряжений в поперечном сечении, то есть при отсутствии скачков напряжений между слоями. Данное условие эквивалентно требованию равенства напряжений, приходящихся на единицу площади поперечного сечения, по всей высоте целика. Разработанные модели сводятся к краевым задачам для дифференциальных уравнений, описывающих форму кривых, соответствующих устойчивому состоянию каждого слоя. Решения этих уравнений позволяют определить уравнения формы отдельных слоёв, которые в совокупности формируют геометрическое описание устойчивой боковой поверхности всего целика. Проведённое численное моделирование напряжённо-деформированного состояния слоистого массива для рассчитанной формы целика подтвердило эффективность предложенной методики, показав снижение концентраций напряжений в центральной части и перераспределение нагрузки на более прочные слои.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, целик, слоистые горные породы, устойчивость целика, макроскопическое поле напряжений, горное давление, эффективные упругие модули

**Благодарности:** Работа выполнена в рамках государственного задания Геофизического центра РАН, утвержденного Минобрнауки России.

**Для цитирования:** Акматов Д.Ж., Шевчук Р.В., Зарубин А.А., Вейс Д.Д., Подлозная М.В. Математическое моделирование устойчивости предохранительных целиков в слоистых породах при подземной разработке месторождений. *Горная промышленность*. 2026;(3):72–78. <https://doi.org/10.30686/1609-9192-2026-3-72-78>

## Mathematical modelling of the safety pillar stability in layered rocks during underground mining

D.Zh. Akmatov<sup>1,2</sup> ✉, R.V. Shevchuk<sup>1,2,3</sup>, A.A. Zarubin<sup>1,2</sup>, D.D. Veis<sup>1,2</sup>, M.V. Podloznaya<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Geophysical Center of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

<sup>2</sup> National University of Science and Technology "MISIS", Moscow, Russian Federation

<sup>3</sup> Schmidt Institute of Physics of the Earth, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

✉ d.akmatov@gcras.ru

**Abstract:** In order to determine the stable shape of a pillar in layered rocks, a set of mathematical models was developed, with each model corresponding to an individual layer of the rock mass. The stable shape of the entire pillar is obtained by combining the stable shapes of its individual layers. In particular, the pillar is assumed to have a layered structure and a circular cross-section subjected to external stresses. The magnitude of the applied stress is determined, among other factors, by the lengths

of the fractures in the upper layer of the rock mass. The pillar stability is achieved by ensuring a uniform macroscopic stress distribution over the cross-section, i.e., by eliminating stress jumps between the layers. This condition is equivalent to requiring that the stresses per unit area of the cross-section are equal throughout the entire height of the pillar. The developed models are reduced to the boundary-value problems for differential equations describing the shapes of the curves corresponding to the stable state of each layer. Solving these equations helps to shape functions for the individual layers, which together provide a geometric description of the stable lateral surface of the entire pillar. Numerical modelling of the stress-strain state of the layered rock mass for the calculated pillar geometry confirmed the efficiency of the proposed approach, showing reduced stress concentrations in the central part and a redistribution of the load toward stronger layers.

**Keywords:** mathematical modeling, pillar, layered rocks, pillar stability, macroscopic stress field, rock pressure, effective elastic moduli

**Acknowledgments:** This work was performed as part of the State Assignment for the Geophysical Center of the RAS, adopted by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation.

**For citation:** Akmatov D.Zh., Shevchuk R.V., Zarubin A.A., Veis D.D., Podloznaya M.V. Mathematical modelling of the safety pillar stability in layered rocks during underground mining. *Russian Mining Industry*. 2026;(3):72–78. (In Russ.) <https://doi.org/10.30686/1609-9192-2026-3-72-78>

## Введение

В условиях подземной разработки месторождений прочность и устойчивость предохранительных целиков являются критически важными факторами, обеспечивающими безопасность горных работ. В большинстве случаев целики формируются в массивах горных пород слоистой структуры, что определяет их механическое поведение и характер напряжённо-деформированного состояния [1; 2]. При этом форма целика оказывает существенное влияние на перераспределение напряжений в его объёме и, как следствие, на его устойчивость.

Под устойчивостью целика в настоящей работе понимается способность целика при действии горного давления в течение заданного времени сохранять несущую способность и целостность, не переходя в состояние предельного разрушения и опасных деформаций.

Мощность отдельных слоёв может варьироваться от нескольких сантиметров до нескольких метров, что создаёт сложные условия для обеспечения их устойчивости [1–4]. Как показывают современные исследования [2–4], ошибочный выбор формы целика может привести к формированию неоднородного макроскопического поля напряжений, сопровождающегося локальными концентрациями и скачками напряжений между слоями. Данные явления, как правило, обусловлены внутренней структурной неоднородностью массива, в частности – наличием участков с резко различающимися прочностными и деформационными характеристиками пород [4; 5]. Напряжённые аномалии часто становятся причиной преждевременного разрушения целиков, особенно в условиях повышенной трещиноватости или пониженной прочности межслоевых контактов [6–9].

В ряде исследований устойчивость предохранительных целиков оценивалась по их геометрическим параметрам (ширина, высота, отношение сторон, коэффициент запаса прочности и др.), при этом влияние внутренней структуры породы – слоистости, анизотропии прочности и межслоевых контактов с различной несущей способностью – не учитывалось [10–12].

Имеются также исследования, направленные на математическое моделирование формы устойчивого целика. В частности, в работе [13] была предложена математиче-

ская модель устойчивого целика поликристаллической структуры в углевмещающих породах, однако данная модель не учитывает стратифицированную природу горных пород, характерную для многих осадочных и метаморфических образований. Аналогично, в ряде зарубежных исследований [14; 15] рассматриваются вопросы устойчивости выработок в анизотропных средах, но основное внимание уделялось механическим характеристикам слоёв, а геометрическая оптимизация формы целика в условиях послойной структуры массива оставалась вне поля рассмотрения.

В настоящее время сохраняется как научная, так и практическая потребность в разработке обоснованных подходов к определению устойчивой формы целика с учётом слоистой структуры массива, характера макроскопического распределения напряжений и условий механического взаимодействия между слоями. Особую актуальность представляет построение математической модели, в которой форма каждого слоя определяется как решение соответствующего уравнения равновесия, а итоговая форма целика формируется как совокупность этих решений. Данный подход позволяет обеспечить равномерное распределение напряжений по поперечному сечению целика, минимизируя риски возникновения разрушений на границах между слоями.

## Материалы и методы

Для решения поставленной задачи по определению формы устойчивого целика со слоистой структурой построим модель, на основе которой будет разработана математическая модель.

Рассматривается целик с круглым поперечным сечением, на торец которого действует внешнее поле напряжений. Величина действующего напряжения может быть оценена, в частности, по длине трещины в верхнем слое массива [16]. Предполагается, что устойчивая форма каждого отдельного слоя формирует устойчивую форму всего целика в целом. Повышение устойчивости целика достигается при условии равномерного распределения напряжений в поперечном сечении, то есть при отсутствии концентрации напряжений.

На основе вышеуказанных предпосылок построим мате-

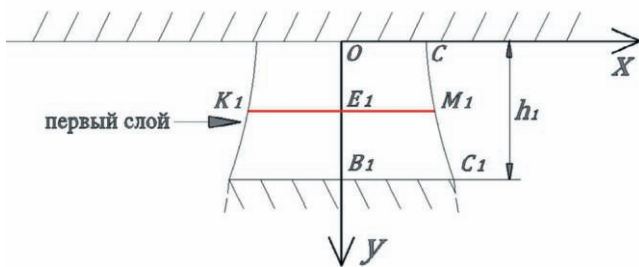
математическую модель. Предполагается, что слоистый массив можно аппроксимировать как совокупность упругих слоёв, каждый из которых обладает макроскопической однородностью и характеризуется собственным эффективным тензором модуля упругости. Определение эффективных упругих модулей может быть осуществлено на основе математических моделей, представленных в работах [17–19].

При этом предполагается, что значения эффективных упругих модулей слабо различаются от слоя к слою, что отражает физико-механическую близость пород.

В качестве внешнего силового воздействия принято горное давление  $\sigma_0$ , которое может быть определено на основе известных аналитических или экспериментальных зависимостей [16; 19–21].

Нумерация слоёв в пределах целика ведётся сверху вниз: верхний слой, прилегающий к кровле выработки, обозначается как первый; последующие слои нумеруются по порядку – второй, третий и т.д., вплоть до  $n$ -го слоя, соответствующего подошве целика.

Рассмотрим первый (верхний) слой слоистого целика высотой  $h_1$  (рис. 1). Введём декартову систему координат  $XOY$ : ось  $X$  направлена горизонтально, ось  $Y$  – вниз по высоте слоя. Контур боковой поверхности слоя задаётся кривой  $CC_1$ . В произвольной точке контура  $M_1(x, y)$  рассмотрим горизонтальное сечение слоя  $M_1K_1$  (красная линия на рис. 1), характеризующее текущую ширину (радиус) слоя на уровне  $y$ .



**Рис. 1**  
Сечение первого слоя исследуемого слоистого целика

**Fig. 1**  
A cross-section of the first layer of the investigated layered pillar

Предполагается, что целик устойчив, если напряжение на единицу площади в любом горизонтальном сечении остаётся постоянным. Таким образом, общее напряжение на высоте  $y$  слоя  $k$  может быть записано в виде:

$$\sigma_0 = \frac{P(y)}{A(y)} = \frac{P(y)}{\pi x^2(y)} = const. \quad (1)$$

где  $x(y)$  – радиус слоя на высоте  $y$  (т.е. половина ширины сечения типа  $M_1K_1$ );  $A(y) = \pi x^2$  – площадь сечения;  $P(y)$  – суммарная нагрузка выше уровня  $y$ .

Суммарная нагрузка на уровне  $y$  складывается из внешней нагрузки и веса вышележащей части слоя:

$$P(y) = P_1 + \rho g \int_0^y \pi x^2(\eta) d\eta, \quad y \in [0, h_1], \quad (2)$$

где  $P_1$  – внешняя нагрузка на кровле слоя (уровень  $y = 0$ ,

участок  $OC$  на рис. 1);  $\rho$  – плотность пород;  $g$  – ускорение свободного падения.

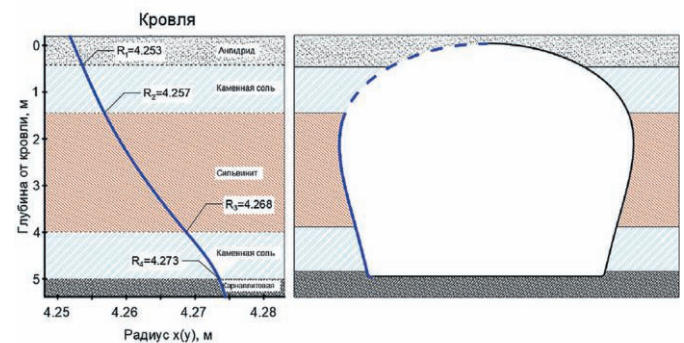
Из (1) и (2) с учетом  $\frac{dP}{dy} = \rho g \pi x^2(y)$  в рамках принятых допущений получаем следующую зависимость радиуса от координаты  $y$ :

$$x(y) = x(0) + \exp\left(\frac{\rho g}{2\sigma_0} y\right), \quad y \in [0, h_1], \quad (3)$$

где  $x(0)$  задаётся по геометрии на кровле (по ширине верхнего сечения на рис. 1). Аналогично формируется профиль для последующих слоёв с учётом веса вышележащих слоёв.

### Результаты

На основе представленной расчетной схемы была проведена пошаговая оценка изменения радиуса целика по высоте в пределах выделенных литологических слоёв. В качестве исходных параметров использованы мощности и плотности пород по геологическому разрезу (рис. 2, табл. 1) [22]. Начальный радиус на кровле целика принят равным среднему значению из диапазона 3,5–5,0 м, что составляет 4,25 м. Внешнее сжимающее напряжение, воздействующее на верхний слой, определено по литостатической оценке и составляет 9,69 МПа.



**Рис. 2**  
Модель устойчивой формы целика в слоистом массиве горных пород

**Fig. 2**  
A model of a stable pillar shape in a layered rock mass

Расчёт выполнялся на основе рекурсивной зависимости (формула (3), табл. 2), что позволило количественно определить изменение радиуса целика в пределах каждого литологического слоя с учётом различий в плотности и мощности пород. Анализ полученных данных (рис. 2) показал, что при переходе от кровли к подошве фиксируется постепенное увеличение радиуса, обусловленное возрастанием суммарного веса вышележащих слоёв и перераспределением напряжений. На суммарной высоте 5,2 м радиус возрастает на 0,023 м (0,54 %), что указывает на близость формы целика к цилиндрической и отсутствие выраженных градиентов напряжений на границах литотипов.

Максимальный прирост радиуса зафиксирован в нижней части массива, в зоне карналлитовых пород, обладающих минимальными значениями плотности и модуля упругости. Эти особенности способствуют перераспределению нагрузки и увеличению площади поперечного сечения целика. В целом суммарный профиль измене-

Таблица 1  
Физико-механические свойства породного массива

Table 1  
Physical and mechanical properties of the rock mass

№ слоя	Порода	Мощность, м	Плотность, кг/м <sup>3</sup>	Модуль Юнга, ГПа	Коэф. Пуассона
1	Ангидрит доломитовая	Выше кровли	2535	35,7 / 30,0	0,11
2	Ангидрит	0,5	2604	48,3 / 30,0	0,23
3	Каменная соль	1,0	2160	11,0 / 6,52	0,33
4	Сильвинит	2,5	2010	9,7	0,31
5	Каменная соль	1,0	2160	6,52	0,27
6	Карналлитовая	Низ >10 м	1930	8,70 / 1,682	0,34

Таблица 2  
Результаты пошагового расчёта изменения радиуса целика по слоям

Table 2  
Results of the step-by-step calculation of changes in the pillar radius by layers

№ слоя	Вес слоёв	R <sub>верх</sub> , м	R <sub>низ</sub> , м	Прирост, м
1	–	–	4,250	–
2	0,112	4,250	4,252	0,002
3	0,239	4,252	4,256	0,004
4	0,617	4,256	4,268	0,012
5	0,246	4,268	4,273	0,005
6	–	4,273	–	–
<b>W<sub>total</sub> = 1,21</b>		<b>ΔR = 0,023м</b>		

ния радиуса характеризуется плавным, монотонным ходом без резких скачков, что свидетельствует об отсутствии зон локальной концентрации напряжений. Вероятно, это связано с близкими физико-механическими характеристиками пород, формирующих рассматриваемый разрез.

Полученные результаты могут служить обоснованием для проектирования параметров горных выработок и прогноза устойчивости целиков при ведении подземных работ в условиях рассматриваемого геологического разреза.

В модели использована фактическая форма целика, заданная радиусами сечений для каждого литологического слоя. Моделирование проводилось в упругопластической постановке с использованием критерия прочности Мора–Кулона для верхних слоёв массива и критерия Друкера–Прагера для соленосных пород. Дополнительные прочностные параметры, необходимые для реализации данных критериев, были приняты из работы [22]. В качестве граничных условий задано равномерное внешнее сжимающее напряжение, имитирующее горное давление.

По результатам численного моделирования (рис. 3, а) максимальные концентрации эквивалентных напряжений (15–20 МПа) наблюдаются вблизи сопряжений формы целика с границами литологических слоёв, преимущественно в зоне кровли и подошвы выработки. В центральной части целика напряжения существенно ниже (6–10 МПа), что указывает на эффективность подобранной формы в перераспределении нагрузки.

По распределению коэффициента пластичности (рис. 3, б) видно, что локальные зоны с  $\lambda > 0,8$  формируются вблизи верхней и нижней кромки целика, что свидетель-

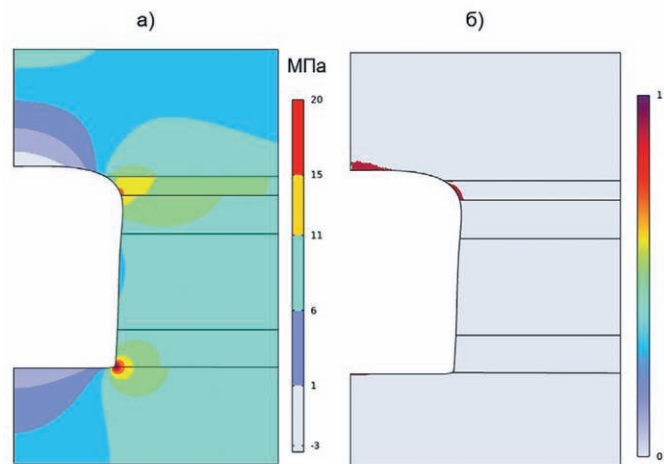


Рис. 3  
Распределение полей напряжений и коэффициента пластичности для рассчитанной формы целика: а – эквивалентные напряжения по Мизесу, МПа; б – коэффициент пластичности (1 – полное развитие пластического состояния)

Fig. 3  
Distribution of the stress fields and plasticity coefficients for the calculated pillar geometry: а – von Mises equivalent stress, MPa; б – plasticity coefficient (1 – corresponds to fully developed plastic state)

ствует о начале пластических деформаций в этих областях. При этом в основной массе целика значения коэффициента пластичности не превышают 0,4, что указывает на значительный запас устойчивости.

Сопоставление с результатами аналитического расчёта

подтверждает, что форма целика, определённая по предложенной методике, обеспечивает оптимальное распределение напряжений, снижает концентрацию в центральной зоне и перераспределяет нагрузку на более прочные ангидритовые прослои. Это позволяет увеличить срок службы выработки и снизить риск преждевременной потери устойчивости.

#### **Выводы**

В работе показана методика определения устойчивой формы целика в условиях слоистого строения горного массива. Методика основана на комплексе математических моделей, каждая из которых описывает устойчивое состояние отдельного литологического слоя с учётом его физико-механических характеристик и внешнего поля напряжений. Формирование общей формы целика осуществляется путём объединения расчётных контуров слоёв при условии равномерного распределения напряжений в поперечном сечении по всей его высоте.

Результаты расчёта показали, что оптимальная форма целика перераспределяет нагрузку с менее прочных слоёв на более прочные и снижает локальные концентрации напряжений. Дополнительно численное моделирование в упругопластической постановке установило, что:

- пиковые значения эквивалентных напряжений в центральной зоне целика снижаются по сравнению с условно-геометрическими формами;
- зоны пластического течения локализуются вблизи границ контакта с кровлей и подошвой, не распространяясь на основную массу целика;
- коэффициент пластичности в большей части объёма не превышает 0,4 что указывает на значительный запас устойчивости.

Полученные результаты могут быть использованы при проектировании и обосновании параметров камерно-столбовой системы разработки в условиях слоистого строения пород, а также для управления их устойчивостью.

#### **Вклад авторов**

**Д.Ж. Акматов** – идея исследования, постановка задачи, разработка методики, научное редактирование.

**Р.В. Шевчук** – аналитические расчёты, математическое моделирование, подготовка данных, написание текста.

**А.А. Зарубин** – численное моделирование, анализ результатов, подготовка иллюстраций, написание разделов статьи.

**Д.Д. Вейс** – участие в разработке методики, интерпретация результатов, участие в обсуждении и редактировании текста статьи.

**М.В. Подлозная** – сбор и обработка данных по свойствам пород, подготовка таблиц, участие в обсуждении и оформлении статьи.

#### **Authors' contribution**

**D.Zh. Akmatov** – research concept, formulation of the scientific problem, methodology development, scientific editing.

**R.V. Shevchuk** – analytical calculations, mathematical modeling, data preparation, text writing.

**A.A. Zarubin** – numerical modeling, results analysis, figure preparation, writing of article sections.

**D.D. Veis** – methodology development support, interpretation of results, participation in discussion and article editing.

**M.V. Podloznaya** – collection and processing of rock property data, table preparation, participation in discussion and article formatting.

#### **Конфликт интересов**

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

#### **Conflict of interest**

The authors declare no conflict of interest.

#### **Список литературы / References**

1. Wang R., Shi Z., Fan J., Wang Y., Peng Y., He M., Zhang B. Research on narrow coal pillar width optimization and surround rock control in Shiquan mine. *Rock Mechanics Bulletin*. 2025;4(2):100172. <https://doi.org/10.1016/j.rockmb.2024.100172>
2. Maina D., Konietzky H. Factor of safety analysis for mine pillar considering the influence of the intermediate principal stress component. *Green and Smart Mining Engineering*. 2024;1(3):241–248. <https://doi.org/10.1016/j.gsme.2024.07.001>
3. Xia K., Chen C., Liu X., Liu X., Yuan J., Dang S. Assessing the stability of high-level pillars in deeply-buried metal mines stabilized using cemented backfill. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*. 2023;170:105489. <https://doi.org/10.1016/j.ijrmms.2023.105489>
4. Terron-Almenara J., Skretting E., Holter K.G., Høien A.H. Design of rock support in hard and layered rock masses using a hybrid method: A study based on the construction of the New Skarvberg Tunnel, Norway. *Rock Mechanics and Rock Engineering*. 2024;57(12):10491–10532. <https://doi.org/10.1007/s00603-024-04082-3>

5. Luo P., Li D., Zhang C., Ru W., Han Z., Ma J. Experimental investigation on biaxial mechanical properties of laminated rock and floor heave mechanism of tunnel based on DIC. *Engineering Failure Analysis*. 2024;156:107848. <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2023.107848>
6. Татаринов В.Н., Акматов Д.Ж., Маневич А.И., Шевчук Р.В. Иерархический подход к оценке устойчивости геологической среды в геомеханических исследованиях. *Горный журнал*. 2024;(1):15–21. <https://doi.org/10.17580/gzh.2024.01.03>  
Tatarinov V.N., Akmatov D.Zh., Manevich A.I., Shevchuk R.V. Hierarchical approach to assessing sustainability of geological environment in geomechanical studies. *Gornyi Zhurnal*. 2024;(1):15–21. (In Russ.) <https://doi.org/10.17580/gzh.2024.01.03>
7. Татаринов В.Н., Гупало В.С., Акматов Д.Ж., Маневич А.И., Шевчук Р.В., Лосев И.В., Камаев А.А. Трехмерное моделирование напряженно-деформированного состояния и анализ стабильности породного массива при строительстве подземной исследовательской лаборатории. *Записки Горного института*. 2026;278:3–15. Режим доступа: <https://pmi.spmi.ru/pmi/article/view/16631> (дата обращения: 27.02.2026).  
Tatarinov V.N., Gupalo V.S., Akmatov D.Z., Manevich A.I., Shevchuk R.V., Losev I.V., Kamaev A.A. Three-dimensional modeling of stress-strain state and rock massif stability analysis during the construction of an underground research laboratory. *Journal of Mining Institute*. 2026;278:3–15. Available at: <https://pmi.spmi.ru/pmi/article/view/16631> (accessed: 27.02.2026).
8. Liu S., Wan Z., Zhang Y., Lu S., Ta X., Wu Z. Research on evaluation and control technology of coal pillar stability based on the fracture digitization method. *Measurement*. 2020;158:107713. <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2020.107713>
9. Li N., Zare M., Yi C., Jimenez R. Stability risk assessment of underground rock pillars using logistic model trees. *International Journal of Environmental Research and Public Health*. 2022;19(4):2136. <https://doi.org/10.3390/ijerph19042136>
10. Rafiei Renani H., Martin C.D. Modeling the progressive failure of hard rock pillars. *Tunnelling and Underground Space Technology*. 2018;74:71–81. <https://doi.org/10.1016/j.tust.2018.01.006>
11. Shi F., Fantuzzi N., Li Y., Trovalusci P., Wei Z. Modeling of dilatancy effect in layered rock with rough interfaces using micropolar continuum. *Mechanics Research Communications*. 2022;125:103994. <https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2022.103994>
12. Maheshwari P. Analysis of deformation of linear viscoelastic two layered laminated rocks. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*. 2021;141:104681. <https://doi.org/10.1016/j.ijrmms.2021.104681>
13. Кузин Е.А., Халкечев К.В. Математическая модель определения формы устойчивого целика поликристаллической структуры в углевещающих породах. *Уголь*. 2020;(2):22–25. <https://doi.org/10.18796/0041-5790-2020-2-22-25>  
Kuzin E.A., Khalkechev K.V. Mathematical model for determining the shape of a stable pillar of a polycrystalline structure in carbon-bearing rocks. *Ugol'*. 2020;(2):22–25. (In Russ.) <https://doi.org/10.18796/0041-5790-2020-2-22-25>
14. Mark C., Agioutantis Z. Analysis of coal pillar stability (ACPS): A new generation of pillar design software. *International Journal of Mining Science and Technology*. 2019;29(1):87–91. <https://doi.org/10.1016/j.ijmst.2018.11.007>
15. Frith R., Reed G. Coal pillar design when considered a reinforcement problem rather than a suspension problem. *International Journal of Mining Science and Technology*. 2017;28(1):11–19. <https://doi.org/10.1016/j.ijmst.2017.11.013>
16. Халкечев Р.К., Халкечев К.В. Разработка автоматизированной системы определения внешнего поля напряжений, действующего на породный массив. *Горный информационно-аналитический бюллетень*. 2017;(11):220–226. <https://doi.org/10.25018/0236-1493-2017-11-0-220-226>  
Khalkechev R.K., Khalkechev K.V. Development of automated system to determine actual external stress field applied to rock mass. *Mining Informational and Analytical Bulletin*. 2017;(11):220–226. (In Russ.) <https://doi.org/10.25018/0236-1493-2017-11-0-220-226>
17. Халкечев К.В., Халкечев Р.К. Математическое моделирование неоднородного упругого поля напряжений породного массива кристаллической блочной структуры. *Горный журнал*. 2016;(3):24–26. <https://doi.org/10.17580/gzh.2016.03.05>  
Khalkechev K.V., Khalkechev R.K. Mathematical modeling of nonuniform elastic stress field in rock mass of crystal structure. *Gornyi Zhurnal*. 2016;(3):24–26. (In Russ.) <https://doi.org/10.17580/gzh.2016.03.05>
18. Халкечев Р.К., Халкечев К.В. Управление селективностью разрушения горных пород на основе методов подобия и размерности в динамике трещин. *Горный журнал*. 2016;(6):64–66. <https://doi.org/10.17580/gzh.2016.06.04>  
Khalkechev R.K., Khalkechev K.V. Rock disintegration selectivity control based on the methods of similarity and dimensions in the fracture dynamics. *Gornyi Zhurnal*. 2016;(6):64–66. (In Russ.) <https://doi.org/10.17580/gzh.2016.06.04>
19. Халкечев Р.К. Применение теории мультифрактального моделирования процессов деформирования и разрушения породных массивов с целью краткосрочного прогнозирования внезапных выбросов угля и газа. *Уголь*. 2019;(7):48–51. <https://doi.org/10.18796/0041-5790-2019-7-48-50>  
Khalkechev R.K. Multifractal modeling theory application of rock mass deformation and destruction processes with the aim of short-term forecasting sudden coal and gas outbursts. *Ugol'*. 2019;(7):48–51. (In Russ.) <https://doi.org/10.18796/0041-5790-2019-7-48-50>

20. Халкечев Р.К. Нечеткая математическая модель изменения концентрации трещин в минерале под действием внешней нагрузки. *Горный информационно-аналитический бюллетень*. 2019;(6):97–105. <https://doi.org/10.25018/0236-1493-2019-06-0-97-105>  
Khalkechev R.K. Fuzzy mathematical model of crack density variation in mineral under external loading. *Mining Informational and Analytical Bulletin*. 2019;(6):97–105. (In Russ.) <https://doi.org/10.25018/0236-1493-2019-06-0-97-105>
21. Халкечев Р.К. Экспертная система разработки математических моделей геомеханических процессов в породных массивах. *Горный журнал*. 2016;(7):96–99. <https://doi.org/10.17580/gzh.2016.07.21>  
Khalkechev R.K. Expert system for mathematical modeling of geomechanical processes in rock mass. *Gornyi Zhurnal*. 2016;(7):96–99. (In Russ.) <https://doi.org/10.17580/gzh.2016.07.21>
22. Морозов И.А., Паньков И.Л., Токсаров В.Н. Изучение устойчивости горных выработок в соляных породах. *Горный информационно-аналитический бюллетень*. 2021;(9):36–47. [https://doi.org/10.25018/0236\\_1493\\_2021\\_9\\_0\\_36](https://doi.org/10.25018/0236_1493_2021_9_0_36)  
Morozov I.A., Pankov I.L., Toksarov V.N. Stability of underground openings in salt rock masses. *Mining Informational and Analytical Bulletin*. 2021;(9):36–47. (In Russ.) [https://doi.org/10.25018/0236\\_1493\\_2021\\_9\\_0\\_36](https://doi.org/10.25018/0236_1493_2021_9_0_36)

**Информация об авторах**

**Акматов Дастан Женишбекович** – кандидат технических наук, старший научный сотрудник лаборатории геодинамики, Геофизический центр Российской академии наук, г. Москва, Российская Федерация; старший преподаватель кафедры геологии и маркшейдерского дела, Национальный исследовательский технологический университет «МИСИС», г. Москва, Российская Федерация; e-mail: d.akmatov@gcras.ru

**Шевчук Роман Васильевич** – кандидат технических наук, старший научный сотрудник лаборатории геодинамики, Геофизический центр Российской академии наук, г. Москва, Российская Федерация; старший преподаватель кафедры геологии и маркшейдерского дела, Горный институт, Национальный исследовательский технологический университет «МИСИС», г. Москва, Российская Федерация; научный сотрудник лаборатории геоинформатики, Институт физики Земли имени О.Ю. Шмидта Российской академии наук, г. Москва, Российская Федерация; e-mail: Shevchuk.002@mail.ru

**Зарубин Артем Алексеевич** – инженер, сотрудник лаборатории геодинамики, Геофизический центр Российской академии наук, г. Москва, Российская Федерация; студент, Национальный исследовательский технологический университет «МИСИС», г. Москва, Российская Федерация; e-mail: a.zarubin@gcras.ru

**Вейс Даниэль Дмитриевич** – инженер, сотрудник лаборатории геоинформатики и больших данных Арктики, Геофизический центр Российской академии наук, г. Москва, Российская Федерация; студент, Национальный исследовательский технологический университет «МИСИС», г. Москва, Российская Федерация; e-mail: daniel.vejs@bk.ru

**Подлозная Маргарита Владимировна** – студент, Национальный исследовательский технологический университет «МИСИС», г. Москва, Российская Федерация; e-mail: margpod0606@mail.ru

**Информация о статье**

Поступила в редакцию: 11.02.2026

Поступила после рецензирования: 24.03.2026

Принята к публикации: 31.03.2026

**Information about the authors**

**Dastan Zh. Akmatov** – Cand. Sci. (Eng.), Senior Researcher, Laboratory of Geodynamics, Geophysical Center of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation; Senior Lecturer, Department of Geology and Surveying, College of Mining, National University of Science and Technology “MISIS”, Moscow, Russian Federation; e-mail: d.akmatov@gcras.ru

**Roman V. Shevchuk** – Cand. Sci. (Eng.), Senior Researcher, Laboratory of Geodynamics, Geophysical Center of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation; Senior Lecturer, Department of Geology and Surveying, College of Mining, National University of Science and Technology “MISIS”, Moscow, Russian Federation; Researcher, Geoinformatics Laboratory, Schmidt Institute of Physics of the Earth, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation; e-mail: Shevchuk.002@mail.ru

**Artem A. Zarubin** – Engineer, Laboratory of Geodynamics, Geophysical Center of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation; Student, National University of Science and Technology “MISIS”, Moscow, Russian Federation; e-mail: a.zarubin@gcras.ru

**Daniel D. Veis** – Engineer, Laboratory of Geoinformatics and Arctic Big Data, Geophysical Center of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation; Student, National University of Science and Technology “MISIS”, Moscow, Russian Federation; e-mail: daniel.vejs@bk.ru

**Margarita V. Podloznaya** – Student, National University of Science and Technology “MISIS”, Moscow, Russian Federation; e-mail: margpod0606@mail.ru

**Article info**

Received: 11.02.2026

Revised: 24.03.2026

Accepted: 31.03.2026